

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Beschreiben Sie folgende Teilmengen des \mathbb{R}^3 mit Hilfe von (angepassten) Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten.

Sanduhr:

$$S \subset \mathbb{R}^3, \quad S : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z^2 \leq \frac{9}{4}(x^2 + y^2).$$

Turmkuppel in Form einer Halbkugelschale:

$$K \subset \mathbb{R}^3, \quad K : 0.81 \leq x^2 + y^2 + (z - 10)^2 \leq 1, \quad z \geq 10.$$

Elliptisches Rohrstück:

$$R \subset \mathbb{R}^3, \quad R : 81 \leq \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 100, \quad -5 \leq z \leq 5.$$

- b) Gegeben sei eine Platte in Form eines Parallelogramms:

$$P = \left\{ (x, y)^T, -2 \leq y - x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y + 3x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

und die Funktion $f(x, y) := \frac{2(y - x)}{1 + (y - x)^2} \cdot \cos(y + 3x)$.

Berechnen Sie das Integral

$$\int_P f(x, y) d(x, y)$$

Verwenden Sie dazu die Transformationsformel aus der Vorlesung mit $u := y - x$ und $v := y + 3x$.

Aufgabe 2)

Gegeben sei der wie folgt beschriebene Teil D einer Kugel:

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, y \geq 0, z^2 \leq x^2 + y^2 \right\}.$$

Berechnen Sie das Trägheitsmoment von D bzgl. der z -Achse bei homogener Massendichte $\rho = 2$.

Hinweis: $\cos^3(x) = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos(x) + \cos(3x))$

Abgabetermine: 14.01.-18.01.2013