Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2012/13**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (Klausur Prof. Oberle, 2011) Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \text{Bestimmen Sie die Minima von} & f(x,y) \;=\; xy \\ \text{unter der Nebenbedingung} & g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8 \leq 0\,. \end{array} \tag{1}$$

a) Gibt es lokale Minima im Innern des zulässigen Bereiches, d.h. für $x^2 + 4y^2 - 8 < 0$? Begründen Sie ihre Antwort.
(Hinweis: lokale Minima im Innern der zulässigen Menge sind auch lokale Minima des unrestringierten Problems: $\min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f(x,y) = xy$.)

b) Bestimmen Sie alle globalen Minima von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8 = 0$$

mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

c) Geben Sie alle globalen Minima des Optimierungsproblems (1) an.
(Hinweis: Nutzen Sie a) und b))

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) \;:=\; x^2 + y^2 + z^2$$

unter den Nebenbedingungen $\boldsymbol{g}\,(x,y,z) = (0,0)^T$, wobei

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) \;&:=\; x^2 + y^2 - z^2\,, \qquad \text{und} \\ g_2(x,y,z) \;&:=\; x + 2\sqrt{2}y + z - 1\,. \end{aligned}$$

Gehen Sie hierzu folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie, dass alle zulässigen Punkte die Regularitätsbedingung (Rang $J(g_1, g_2) = 2$) erfüllen.

b) Sei $\boldsymbol{x} := (x,y,z)^T$. Bestimmen Sie alle stationären Punkte $\boldsymbol{x}^{[k]}$ der Lagrange-Funktion $F(\boldsymbol{x}, \lambda, \mu)$.

c) Untersuchen Sie für jeden stationären Punkt $\boldsymbol{x}^{[k]}$ die Hesse-Matrix $HF(\boldsymbol{x}^{[k]})$ auf ihre Definitheit auf dem Tangentialraum $T\boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{x}^{[k]}) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{v}^T \nabla \boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{x}^{[k]})\} = 0$.

Abgabetermine: 17.12.-21.12.2012