Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AI	BU	ET	IN	LUM	MB	MTB	SB	BVT	EUT	VT	

Aufgabe	**a)i)**	**a) ii)**	**a) iii)**	**a) iv)**	**b) i)**	**b) ii)**	**c**	$\sum$ =
Punkte	1	1	2	3	1	1	1	10
erreichte Punkte								

BONUS =

Bitte lösen Sie die angegebenen Aufgaben, und tragen Sie Ihre Antworten in die dafür vorgesehenen Zeilen ein. Es gibt keine negativen Punkte. Der Lösungsweg wird nicht bewertet.

a) **Hinweis: Ausmultiplizieren ist nicht nötig!**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x^3 + x)(2y + 1)$.

(i) Dann gilt

$$\boxed{\operatorname{grad} f(x,y) = ((3x^2 + 1)(2y + 1)\,,\, 2(x^3 + x))}$$

(ii) Im Punkt $(1,\, 1)^T$ gilt für die Hessematrix $Hf(x,y)$

$$\boxed{\mathrm{H}f(1,\,1) = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}}$$

(iii) Das Taylorpolynom zweiten Grades zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lautet

$$\boxed{T_2(x,y) = 6 + 12(x-1) + 4(y-1) + 9(x-1)^2 + 8(x-1)(y-1)\,.}$$

(iv) f hat einen stationären Punkt P_0. Geben Sie diesen an und klassifizieren Sie ihn.

$$\boxed{P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

ist ein

- [ ] lokales Maximum.
- [ ] lokales Minimum.
- [X] Sattelpunkt.

denn die Eigenwerte der Hessematrix von f in P_0 sind:

$$\boxed{\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = 2\,.}$$

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2+1 \\ 2xy + \cos(y) \end{pmatrix}$.

(i) Dann ist die Jacobi-Matrix von f

$$\boxed{\mathrm{J}f(x,\,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x - \sin(y) \end{pmatrix}}$$

(ii) Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ die Menge der Punkte, für die $\mathrm{J}\,f(x,y)$ singulär ist. Dann gilt:

$$\boxed{S = \left\{ \tbinom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 0 \right\}}$$

c) Durch $f(x,y) = x^3 - 4y^3 + 2xy = 0$ ist in der Umgebung von $P_0 = (-2,\,-1)$ implizit eine Funktion $y(x)$ definiert. Es gilt also lokal

$$f(x,y) = 0 \Longrightarrow y = g(x), \quad g(-2) = -1\,.$$

Dann ist:

$$\boxed{g'(-2) = 5/8}$$