Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:	AI	BU	ET	IN	LUM	MB	MTB	SB	BVT	EUT	VT	

Aufgabe	**a)i)**	**a) ii)**	**a) iii)**	**a) iv)**	**b) i)**	**b) ii)**	**c**	$\sum$ =
Punkte	1	1	2	3	1	1	1	10
erreichte Punkte								

BONUS =

Bitte lösen Sie die angegebenen Aufgaben, und tragen Sie Ihre Antworten in die dafi¿ $\frac{1}{2}$ r vorgesehenen Zeilen ein. Bei richtigen Antworten erhalten Sie die oben angegebenen Punkte. Es gibt keine negativen Punkte. Der Lï¿ $\frac{1}{2}$ sungsweg wird nicht bewertet.

a) **Hinweis: Ausmultiplizieren ist nicht nï¿ $\frac{1}{2}$ tig!**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (\frac{x^3}{3} + x) \cdot (y - 1)$.

(i) Dann gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) \quad = \quad \left((x^2+1)(y-1),\ \frac{x^3}{3} + x \right)$$

(ii) Im Punkt $(1,\, 2)^T$ gilt fï¿ $\frac{1}{2}$ r die Hessematrix $Hf(x,y)$

$$\mathrm{H}f(1,\,2) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Das Taylorpolynom zweiten Grades zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ lautet

$$\boxed{T_2(x,y) \;=\; \tfrac{4}{3} \;+\; 2(x-1) \;+\; \tfrac{4}{3}\,(y-2) \;+\; (x-1)^2 \;+\; 2(x-1)(y-2)}$$

(iv) f hat einen stationï¿½ren Punkt P_0. Geben Sie diesen an und klassifizieren Sie ihn.

$$\boxed{P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

ist ein

- [ ] lokales Maximum.
- [ ] lokales Minimum.
- [X] Sattelpunkt.

denn die Eigenwerte der Hessematrix von f in P_0 sind:

$$\boxed{\lambda_1 \;=\; -1 \qquad \lambda_2 \;=\; 1}$$

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ y^2 \end{pmatrix}.$

(i) Dann gilt fï¿½r die Jacobi-Matrix von f

$$\boxed{\mathrm{J}f(x,\,y) \;=\; \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}}$$

(ii) Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ die Menge der Punkte, fï¿½r die $\mathrm{J}\,f(x,y)$ singulï¿½r ist. Dann gilt:

$$\boxed{S \;=\; \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;:\; x = 0 \,\vee\, y = 0 \right\}}$$

c) Durch $f(x,y) \;=\; x^3 - 2y^2 + y + 2 \;=\; 0$ ist in der Umgebung von $P_0 = (1,-1)$ implizit eine Funktion $y = g(x)$ definiert. Es gilt also lokal

$$f(x,y) \;=\; 0 \implies y = g(x), \quad g(1) = -1\,.$$

Dann gilt:

$$\boxed{g\,'(1) \;=\; -\frac{3}{5}}$$