**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. H. J. Oberle

**WiSe 2010/2011**

# Klausur zur Mathematik III

## (Modul: Analysis III)

**10. März 2011**

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

**Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.**

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Name:** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Vorname:** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Matr.-Nr.:** | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Studiengang:**

| AIW | BU | ET | GES | IIW | LUM | MB | MTB | SB | BVT | EUT | VT |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**Wertung nach DPO :** zus. mit Differentialgleichungen I ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **2** angegebenen Aufgaben. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.

| **Aufg.** | **Punkte** | **Korrekteur** |
|---|---|---|
| **1** | | |
| **2** | | |

$\sum =$

**Aufgabe 1:** Gegeben ist die Funktion

$$f \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) \;=\; \cos(2x-3y) \,+\, x^3 \,-\, y^3 \,+\, 2y^2\,.$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2$ von $f$ mit dem Entwicklungspunkt $(0,0)^{\mathrm{T}}$.

b) Zeigen Sie, dass für den Betrag des Restglieds $R_2(x,y) = f(x,y) \,-\, T_2(x,y)$ folgende Abschätzng gilt:

$$|R_2(x,y)| \;\le\; 0.1 \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \, |x| \le 0.1 \,\wedge\, |y| \le 0.1\,.$$

c) Berechnen Sie einen stationären Punkt von $T_2$. Handelt es sich bei dem stationären Punkt um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt. Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung zu Aufgabe 1)**

a) [**4 Punkte**]

| | Wert in $(0,1)^T$ |
|---|---|
| $f(x,y) \;:=\; \cos(2x-3y) \,+\, x^3 \,-\, y^3 \,+\, 2y^2$ | $1$ |
| $f_x(x,y) \;=\; -2\sin(2x-3y) \,+\, 3x^2$ | $0$ |
| $f_y(x,y) \;=\; 3\sin(2x-3y) \,-\, 3y^2 \,+\, 4y$ | $0$ |
| $f_{xx}(x,y) \;=\; -4\cos(2x-3y) \,+\, 6x$ | $-4$ |
| $f_{xy}(x,y) \;=\; 6\cos(2x-3y)$ | $6$ |
| $f_{yy}(x,y) \;=\; -9\cos(2x-3y) \,-\, 6y \,+ 4$ | $-5$ |

$$T_2(x,y) = 1 \,-\, 2x^2 \,+\, 6xy \,-\, \frac{5}{2}\,y^2\,.$$

b) [**3 Punkte**]

| | maximaler Betrag |
|---|---|
| $\lvert f_{xxx}(x,y)\rvert \;=\; \lvert 8\sin(2x-3y) \,+ 6\rvert$ | $\le\, 14$ |
| $\lvert f_{xxy}(x,y)\rvert \;=\; \lvert -12\,\sin(2x-3y)\rvert$ | $\le\, 12$ |
| $\lvert f_{xyy}(x,y)\rvert \;=\; \lvert 18\,\sin(2x-3y)\rvert$ | $\le\, 18$ |
| $f_{yyy}(x,y) \;=\; \lvert -27\,\sin(2x-3y) - 6\rvert$ | $\le\, 33$ |

Mit $C = 33$ gilt:

$$|R_2(x,y)| \;\le\; \frac{2^3}{3!} \cdot C \cdot \|\,\boldsymbol{x} \,-\, \boldsymbol{x}_{\,0}\|_\infty \;\le\; \frac{8}{6} \cdot 33 \cdot 0.1^3 \;=\; 0.044 \;<\; 0.1\,.$$

c) [**3 Punkte**]

$$\operatorname{grad} T_2(x,y) = (-4x+6y,\, 6x-5y) = (0,0) \quad [\textbf{1 Punkt}]$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{3}{2}\,y\,, \qquad \wedge \qquad 18y - 5y = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = y = 0\,.$$

Einziger stationärer Punkt: $P_0 = \binom{0}{0}$. [**1 Punkt**]

Für die Hesse-Matrix rechnet man:

$$HT_2(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det HT_2(x,y) = -16 < 0$$

Es handelt sich um einen Sattelpunkt. [**1 Punkt**]

Wer die Eigenwerte ausrechnet erhält:

$$(-4-\lambda)(-5-\lambda) - 36 = \lambda^2 + 9\lambda - 16 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{145}}{2}\,.$$

**Aufgabe 2:** Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{f}\,,\ \boldsymbol{g}\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,$

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz \\ -2yz \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + z \\ y^2 z + z^3 \\ -y \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\boldsymbol{c}\ :\ [0, \frac{\pi}{6}] \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{c}\,(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Potentiale zu $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ , falls dies möglich ist.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}\,, \qquad \text{und} \qquad \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{g}\, d\boldsymbol{x}\,.$$

**Lösungsskizze:**

a)

Potential zu $\boldsymbol{f}$ : [**3 Punkte**]

$$\begin{aligned}
\Phi_x &= 2xz \iff \Phi(x,y,z) \;=\; x^2 z \;+\; C(y,z) \\
\Phi_y &= C_y(y,z) = -2yz \iff C(y,z) \;=\; -y^2 z + d(z) \Longleftarrow \Phi(x,y,z) \\
&= (x^2 - y^2)z \;+\; d(z) \\
\Phi_z &= x^2 - y^2 + d\,'(z) = x^2 - y^2 \iff d(z) \;=\; k \Longleftarrow \Phi(x,y,z) \;=\; (x^2 - y^2)z \;+\; k\,.
\end{aligned}$$

Zum Beispiel an $(g_1)_z \;=\; 1 \;\neq\; 0 \;=\; (g_3)_x$ sieht man, dass $\boldsymbol{g}$ kein Potential besitzt. [**1 Punkt**]

b)

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} \;=\; \Phi(c(\pi/6)) - \Phi(c(0)) \;=\; \Phi\begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ \cos(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} \qquad [\textbf{1 Punkt}]$$

$$= \Phi\begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\pi^2}{36} \qquad [\textbf{1 Punkt}]$$

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} = \int_0^{\pi/6} <\ \boldsymbol{g}(c(t)), \dot{\boldsymbol{c}}(t)\ >\ dt \quad \dot{\boldsymbol{c}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3\sin(3t) \\ 3\cos(3t) \end{pmatrix} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{c}(t)) = \begin{pmatrix} t^2 + \sin(3t) \\ \cos^2(3t)\sin(3t) + \sin^3(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + \sin(3t) \\ \sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{c}(t))^T \cdot \dot{\boldsymbol{c}}(t) = t^2 + \sin(3t) - 3\sin^2(3t) - 3\cos^2(3t) = t^2 + \sin(3t) - 3 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} = \int_0^{\pi/6} (t^2 + \sin(3t) - 3)\, dt = \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{\cos(3t)}{3} - 3t \right]_0^{\pi/6}$$

$$= \frac{\pi^3}{3 \cdot 6^3} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$