Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion

$$f \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) \;=\; \cos(2x-3y) \,+\, x^3 \,-\, y^3 \,+\, 2y^2\,.$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades T_2 von f mit dem Entwicklungspunkt $(0,0)^{\mathrm{T}}$.

b) Zeigen Sie, dass für den Betrag des Restglieds $R_2(x,y) = f(x,y) \,-\, T_2(x,y)$ folgende Abschätzung gilt:

$$|R_2(x,y)| \,\le\, 0.1 \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \, |x| \le 0.1 \,\wedge\, |y| \le 0.1\,.$$

c) Berechnen Sie einen stationären Punkt von T_2. Handelt es sich bei dem stationären Punkt um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{f}\,,\ \boldsymbol{g} \,:\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,$

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz \\ -2yz \\ x^2-y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+z \\ y^2z+z^3 \\ -y \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\boldsymbol{c} \,:\, [0, \frac{\pi}{6}] \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{c}\,(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}\,.$$

a) Berechnen Sie Potentiale zu $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, falls dies möglich ist.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}\,, \qquad \text{und} \qquad \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{g}\, d\boldsymbol{x}\,.$$