Aufgabe 1: Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Bestimmen Sie die Minima von} \quad & f(x,y) \;=\; xy \\ \text{unter der Nebenbedingung} \quad & g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8 \le 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Gibt es lokale Minima im Innern des zulässigen Bereiches, d.h. für $x^2 + 4y^2 - 8 < 0$? Begründen Sie ihre Antwort.
(Hinweis: lokale Minima im Innern der zulässigen Menge sind auch lokale Minima des unrestringierten Problems: $\min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f(x,y) = xy\,.$)

b) Bestimmen Sie alle globalen Minima von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \;=\; x^2 + 4y^2 - 8 \;=\; 0$$

mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

c) Geben Sie alle globalen Minima des Optimierungsproblems (**??**) an.
(Hinweis: nutzen Sie a) und b))

Lösung zur Aufgabe 1:Zu a). Notwendige Bedingung für Minimum im Innern:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = 0\,, \qquad \text{also} \qquad x = y = 0\,.\ [\textbf{1 Punkt}]$$

Hinreichende Bedingung überprüfen:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist indefinit} \Rightarrow \text{kein Minimum.}\ [\textbf{1 Punkt}]$$

(Alternativ kann man z.B. f entlang der Geraden $y = -x$ untersuchen.)

Zu b). Regularitätsbedingung: $\nabla g(x,y) = (2x, 8y)^T \neq (0,0)^T$ auf der zulässigen Menge erfüllt. [**1 Punkt**]

Eine notwendige Bedingung für (lokale) Optimalität lautet daher:

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\ \textbf{1 Punkt}]$$
$$x^2 + 4y^2 - 8 = 0\,.$$

Gleichungssystem lösen:

- Variante A) (I) $(y + 2\lambda x) \cdot 4y = 0$
  (II) $(x + 8\lambda y) \cdot x = 0$
  (I)-(II) liefert $4y^2 - x^2 = 0$. Die Nebenbedingung $g = 0$ lautet dann
  $2x^2 - 8 = 8y^2 - 8 = 0$ also $x = \pm 2,\ y = \pm 1$
- Variante B) (I) $(y = -2\lambda x) \wedge (x^2 + 4y^2 - 8 = 0) \Rightarrow x^2 + 16\lambda^2 x^2 = 8\,.$
  (II) $(y = -2\lambda x) \wedge (x = -8\lambda y) \Rightarrow x = 16\lambda^2 x \Leftrightarrow x(1 - 16\lambda^2) = 0\,.$

Wegen (I) führt $x = 0$ zu keiner Lösung. Also folgt aus (II) $16\lambda^2 = 1$. Dies in (I) eingesetzt ergibt $2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2$.

Weiter folgt aus $16\lambda^2 = 1$, dass $\lambda = \pm\frac{1}{4}$. Schließlich ergeben sich mit $y = -2\lambda x$ vier Kandidaten für lokale Optimalität:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \quad P_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung der Kandidaten : [**3 Punkte**]

Es gilt $f(P_1) = f(P_2) = -2$ und $f(P_3) = f(P_4) = 2$. Weil die stetige Funktion f auf dem Kompaktum

$$\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4y^2 - 8 = 0\}$$

ihr Minimum annimmt, liegen in P_1 und P_2 globale Minima vor. (Alternativ, wenn auch unnötig aufwändig, könnte man hinreichende Bedingungen 2. Ordnung überprüfen.) [**2 Punkte**]

Zu c). Da auch

$$\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 4y^2 - 8 \leq 0\}$$

kompakt ist, nimmt auch hier die Funktion f ihr Minimum an. Allerdings nicht im Innern (siehe a)). Also liegt das globale Minimum von f auf dem Rand. Wegen b) kommen dafür nur P_1 und P_2 in frage. Weil wiederum $f(P_1) = f(P_2) = -2$ gilt, sind beide Punkte globale Minima für (**??**). [**1 Punkt**]

Aufgabe 2: Gegeben sei

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le z \le 2,\, 0 \le x^2 + y^2 \le \, z^2 \right\},$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ -xy^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_R \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d(x, y, z)$.

b) R ist berandet durch ein ebenes Flächenstück D und ein gewölbtes Flächenstück M. Geben Sie eine Parametrisierung von D an und berechnen Sie den Fluß von $\boldsymbol{f}$ durch D, also

$$\int_D \boldsymbol{f}(x, y, z)\, dO.$$

c) Wie groß ist nach a) und b) der Fluß durch den gewölbten Teil des Randes von R, also

$$\int_M \boldsymbol{f}(x, y, z)\, dO\,?$$

Lösungsskizze:

a) $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d(x, y, z) = 2xy - 2xy + 2z = 2z$. **[1 Punkt]**

Parametrisierung von R:

$0 \le z \le 2,\ x = r\cos(\phi),\ y = r\sin(\phi),\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le r \le z.$ **[1 Punkt]**

$$\int_R \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^z 2z \cdot r\, dr d\phi\, dz$$
$$= 2\pi \int_0^2 z \left[r^2\right]_0^z dz = 2\pi \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi.$$ **[2 Punkte]**

b) Parametrisierung von D:

$p(r, \phi) = (\, r\cos(\phi),\ r\sin(\phi),\ 2)^T,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2$. **[1 Punkt]**

$$\frac{dp}{dr} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{dp}{d\phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{dp}{dr} \times \frac{dp}{d\phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$ **[2 Punkte]**

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \boldsymbol{f} \right\rangle = r \cdot f_3 = r(r^2 + 4).$$ **[1 Punkt]**

$$\int_D \boldsymbol{f}(x, y, z)\, dO = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 + 4r\, d\phi\, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} + 2r^2\right]_0^2 = 24\pi.$$ **[1 Punkt]**

c) Mit dem Satz von Gauß ergibt sich aus a) und b) **[1 Punkt]**

$$\int_M \boldsymbol{f}(x, y, z)\, dO = \int_R \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d(x, y, z) - \int_D \boldsymbol{f}(x, y, z)\, dO = 8\pi - 24\pi = -16\pi.$$