Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7

Aufgabe 1:

a) Gegeben seien das Kraftfeld $\mathbf{K}$ und die Kurve $\mathbf{c}$

$$\mathbf{K}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} t\cdot\cos(t) \\ t\cdot\sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [1,3]\,.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve $\mathbf{c}$ von $\mathbf{c}(1)$ nach $\mathbf{c}(3)$ zu bewegen.

b) Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{f}\,,\ \boldsymbol{g}\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\mathbf{c}\ :\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie Potentiale zu $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, falls dies möglich ist.

(ii) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}\,d\boldsymbol{x}\,, \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{g}\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Aufgabe 2)

a) Sei C der positiv orientierte Rand der Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 \le 4 \right\}.$$

Berechnen Sie $\int_C \mathbf{f}(x,y)\,d(x,y)$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x^2+1) - \frac{y^3}{3} \\ \frac{x^3}{3} + \arctan(e^{-y}) \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben seien die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{y^2}{2} - 2 \,\le\, x \,\le\, 4 - y^2 \right\}$$

und das das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + e^{-y}\cos y \\ 2y + e^{-x}\sin x \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie den Fluß von $\mathbf{f}$ durch den Rand der Menge D.

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie die Oberfläche von

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \,\le\, R^2, z \,\le H \right\}$$

wobei H und R vorgegebene reelle Zahlen mit $0 \le H \le R$ seien.

b) Eine Parkhausauffahrt sei beschrieben durch

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ \phi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,: 0 \,\le\, \phi \,\le 2\pi,\, 4 \le r \le 8 \right\} .$$

Berechnen Sie die Oberfläche der Auffahrt.

Aufgabe 4: Gegeben seien das Flächenstück

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 \,\le\, 4\,,\, x = y^2 + z^2 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \,+\, 2y^2 \,+\, 2z^2 \\ y \,+\, x \,-\, z \\ z \,+\, x \,-\, y \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral $\displaystyle\int_F f(x,y,z)\,do$ direkt.

b) Wie groß ist der Fluß von f durch die Oberfläche des Körpers

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, y^2 + z^2 \,\le\, 4\,,\, y^2 + z^2 \,\le\, x \,\le\, 4 \right\} ?$$

c) Berechnen Sie das Oberflächenintegral aus Teil a) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.