Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Anleitung zu diesem Blatt: Mittwoch 1.12 ab 18 Uhr im Audimax I !

Aufgabe 1: Durch die Relation

$$g(x,y) \;=\; x^4 \;-\; x^2 \;+\; y^2 \;=\; 0$$

ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ implizit gegeben.

Bestimmen Sie die Symmetrien dieser Kurve, die singulären Punkte (+ Klassifikation) und die Kurvenpunkte mit horizontaler bzw. vertikaler Tangente. Bestimmen Sie auch die Steigungen der Kurve in den singulären Punkten und skizzieren Sie die Kurve mittels MATLAB.

Aufgabe 2: Gegeben sei $F(x,y) := x^4 + y^4 + 8xy = 0\,.$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass $F(x,y)$ in der Nähe von $(x_0, y_0)^T := (2,-2)^T$ nach y aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $g(x)$ mit $g(2) = -2$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von x_0 bzw. y_0 folgende Äquivalenz gilt
$$F(x,y) = 0 \iff y = g(x)\,.$$

b) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion g aus Teil a) zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2\,.$ *(Hinweis : implizite Differentiation)*

c) Sei T_2 das Polynom aus Teil b). Berechnen Sie $T_2(2.1)$ und $F(2.1,\, T_2(2.1))\,.$ Alternativ: Skizzieren Sie T_1, T_2 und g. Letzteres kann man in Matlab wie folgt erreichen:

Nach geeigneter Definition von x und y

```
z=  x.^4 +y.^4 +8*x.*y ;
contour(x,y,z,[0 0])
```

Aufgabe 3: Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass die Lösungsmenge von

$$f(x,y,z) := (x^2 - 2e^{xy})z + 2 = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $P_0 := (x_0, y_0, z_0)^T := (0,1,1)^T$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ bildet.

Nach welcher(n) Variablen kann nach dem Satz über implizite Funktionen aufgelöst werden?

Bestimmen Sie die Tangentialebene an diese Fläche im Punkt $(0,1,1)^T$.

Aufgabe 4: Das folgende nichtlineare Gleichungssystem taucht im Zusammenhang mit der Diskretisierung einer exothermen Reaktion auf:

$$\begin{aligned} 2u_1 - u_2 &= \lambda \cosh(u_1) \\ 2u_2 - u_1 &= \lambda \cosh(u_2) \end{aligned}$$

wobei $u_1, u_2, \lambda \in \mathbb{R}$ gelte. Man ist besonders an maximalen λ–Werten und sogenannten Umkehr– bzw. Verzweigungspunkten (s. unten) interessiert.

Offensichtlich wird das System durch $(\lambda_0, (u_1)_0, (u_2)_0) = (0, 0, 0)$ gelöst.

a) Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $(-\epsilon, \epsilon)$ von $\lambda_0 = 0$ gibt, so dass das Gleichungssystem für alle $\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$ eine in einer Umgebung von $(0, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ eindeutige, von λ abhängige Lösung $(u_1(\lambda), u_2(\lambda))^T$ mit $(u_1(0), u_2(0))^T = (0, 0)^T$ besitzt, die stetig nach λ differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass der lokale Lösungsast aus a) sich auch durch u_1 oder u_2 parametrisieren lässt.

c) Berechnen Sie eine Approximation von $(u_1(\lambda), u_2(\lambda))^T$ für kleine $|\lambda|$–Werte, indem Sie durch Differenzieren der Gleichungen

$$\begin{aligned} 2u_1(\lambda) - u_2(\lambda) &= \lambda \cosh(u_1(\lambda)) \\ 2u_2(\lambda) - u_1(\lambda) &= \lambda \cosh(u_2(\lambda)) \end{aligned}$$

die Ableitungen $(u_1(\lambda))', (u_2(\lambda))'$ bei $\lambda = 0$ berechnen und die Taylorpolynome ersten Grades für $u_1(\lambda)$ und $u_2(\lambda)$ aufstellen.

d) Motiviert durch Teil c) und die Symmetrien im Gleichungssystem liegt die Vermutung nahe, dass für den betrachteten Lösungszweig $u_1(\lambda) = u_2(\lambda)$ gilt. Überzeugen Sie sich davon, dass im Fall $u_1 = u_2$ das System auf die Gleichung

$$g(\lambda, u) := u - \lambda \cosh(u) = 0$$

reduziert werden kann. Diese Gleichung kann eindeutig nach λ auflöst werden und liefert $\lambda(u) = \dfrac{u}{\cosh(u)}$.

Zeigen Sie, dass $(\lambda(u), u, u)^T$ in der Nähe von Null tatsächlich ein Lösungsast des nichtlinearen Gleichungssystems ist, und dass dieser Ast mit dem in Teil a) nach λ parametrisierten Ast (nahe Null) übereinstimmen muss.

e) Berechnen Sie Näherungen für die λ–Umkehrpunkte. In diesen Punkten hat die durch $g(\lambda, u) = 0$ gegebene Kurve eine vertikale Tangente, sofern man wie üblich das Koordinatensystem so wählt, dass die erste Variable horizontal und die zweite vertikal abgetragen wird. Stellen Sie die Bestimmungsgleichung für die entsprechenden u–Werte auf, und benutzen Sie z.B. ein Fixpunktverfahren mit Startwert $u = 1$.

Abgabetermine: 06.12.-10.12.2010