Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2

Aufgabe 1:

Gegeben seien die folgenden Geschwindigkeitsfelder $\boldsymbol{u} = (u(x,y), v(x,y))^{\mathrm{T}}$ einiger zweidimensionaler Strömungen

a) $u = 0, \quad v = 2x,$ **b)** $u = \dfrac{y}{2}, \quad v = -2x,$ **c)** $u = -2y, \quad v = 2x.$

Berechnen Sie die Quelldichte $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ und die Wirbeldichte $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} := v_x - u_y$. Skizzieren Sie die Vektorfelder und einige zugehörige Stromlinien (das sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = u,\ \dot{y} = v$ bzw. der Differentialgleichung $y'(x) = v(x,y)/u(x,y)$).

Aufgabe 2:

a) Ein C^1–Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *wirbelfrei*, falls $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, und *quellenfrei*, falls $\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$, für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

Gegeben sei das von einem Parameter $\alpha > 0$ abhängige Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \left(\frac{-y}{r^{2\alpha}}, \frac{x}{r^{2\alpha}} \right)^{\mathrm{T}}, \qquad r^2 := x^2 + y^2 .$$

Für welche Parameter α ist das Vektorfeld (nach der üblichen Einbettung im $\mathbb{R}^3$) quellenfrei ($\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$)?

Gibt es ein α, so dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei ($\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(x,y) := (f_2)_x - (f_1)_y = \boldsymbol{0}$) wird?

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x^2 + y + 4z,\ y^2 + 2z + 5x,\ z^2 + 3x + 6y)^{\mathrm{T}.}$$

Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{f}) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}), \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f})$$

falls diese definiert sind. Einer der Ausdrücke verschwindet für die vorgegebene Funktion f identisch. Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass dieser Ausdruck nicht für beliebige f identisch verschwinded.

Aufgabe 3: Seien $a, b,$ und c feste, positive, reelle Zahlen. Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen folgender Funktionen und deren Determinanten.

Für welche Werte der Variablen verschwindet die Determinante der Jacobi-Matrix?

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ar\cos\phi \\ br\sin\phi \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases} \qquad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ar\cos\phi\cos\theta \\ br\sin\phi\cos\theta \\ cr\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_5(t) = (\Phi \circ g)(t) = \Phi(t, y(t)) \\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & C^2 - \text{Funktion} \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 & \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad g, \Phi \quad C^2 - \text{Funktionen} \\ g(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} & \Phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \Phi(x_1, x_2)\,. \end{cases}$$

Aufgabe 4: Gegeben seien die Punkte

$$P_1 = (\frac{\pi}{2}, 0)^T\,, \quad P_2 = (\pi, 0)^T\,, \quad P_3 = (0, 0)^T\,,$$

sowie die Abbildung $f(x, y) := x^2 \cos(x + y)\,.$
Stellen Sie fest, welche der durch die Vektoren

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = (1, \frac{4}{3})^T\,, \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_2 = (-1, -1)^T\,, \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_3 = (0, 1)\,,$$

gegebenen Richtungen in P_1 bzw. P_2 bzw. P_3 Anstiegs- oder Abstiegs- oder Tangentialrichtungen sind?

Abgabetermine: 08.11.-12.11.2010