Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1

Aufgabe 1: Veranschaulichen Sie sich für $k = 1, 2, 3, 4$ die folgenden Abbildungen
$f_k : [-1, 1]$ x $[-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ indem Sie jeweils einige Höhenlinien

$f_k^{-1}(C) := \{(x, y)^{\mathrm{T}} : \ f(x, y) = C\}$

von f_k für verschiedene Werte von C skizzieren.
Versuchen Sie Skizzen der Flächen $(x, y, f_k(x, y))$ zu erstellen.
Benutzen Sie ggf. entsprechende Programme z.B. die MATLAB–Funktionen *meshgrid, mesh, surf* und *contour* bzw. deren ez-Versionen.

a) $f_1(x, y) \ = \ x \ - \ 2\,y,$ b) $f_2(x, y) \ = \ x\,y,$

c) $f_3(x, y) \ = \ \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \ (x, y) \neq (0, 0),$ d) $f_4(x, y) \ = \ \cos(2\pi y)\,\sin(\pi x)\,.$

Aufgabe 2:
Berechnen Sie zu den Funktionen aus Aufgabe 2) die Gradientenfelder analytisch. Skizzieren Sie die Gradientenfelder (z.B. mit Hilfe der MATLAB-Funktionen *meshgrid, contour, gradient* und *quiver*). Versuchen Sie anhand Ihrer Beobachtungen (d.h. ohne Beweis) eine Vermutung zu äußern, wie die Richtung des Gradienten in einem festen Punkt mit der Richtung der Höhenlinie durch diesen Punkt zusammenhängt.

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktionen:

$$f(x, y, z) := xyz\,\sin(x + y + z),$$

$$g(x, y, z) := \frac{\cos^2(x)e^y}{z}$$

b) Die *Tangentialebene* an den Graphen einer differenzierbaren Funktion $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x^0, y^0) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$z = f(x^0, y^0) + f_x(x^0, y^0)\,(x - x^0) + f_y(x^0, y^0)\,(y - y^0)$$

Man bestimme die Tangentialebene von $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ im Punkt $(x^0, y^0) = (-1, 1)$.

Aufgabe 4:
Die Funktion

$$u(x,t) := \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x + ct)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(x - ct)\right)\right]$$

beschreibt näherungsweise die Auslenkung des Punktes $x \in [0, L]$ einer schwingenden Saite der Länge L zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit den Anfangsdaten $u(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$.

a) Bestimmen Sie die Randdaten $u(0, t)$ und $u(L, t)$.

b) Skizzieren Sie die Form der Saite für $t = 0, \frac{L}{6c}, \frac{L}{4c}, \frac{L}{3c}, \frac{L}{2c}, \frac{L}{c}$

c) Zeigen Sie, dass u die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

erfüllt.

Abgabetermine: 25.10.-29.10.2010