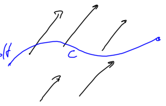
Vo An III 20.1.10

$\int_C f(x)\cdot dx = \int_a^b \langle f(c(t)), \dot c(t)\rangle dt$



- falls $f = \nabla\varphi$

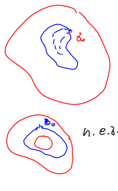
$\int_C f(x)\cdot dx = \varphi(c(b)) - \varphi(c(a))$

*) falls rot $f \neq 0$

$0 \neq \text{rot } f \neq \text{rot } \nabla\varphi = 0 \quad \nexists\varphi$

*) falls rot $f = 0$ D e.z.h.

$\Rightarrow \exists\varphi, f = \nabla\varphi$



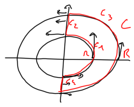
n.e.z.h.

*) falls rot $f = 0$ D n.e.z.h

i.A. $\nexists\varphi$

Jan 20-12:31

$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$



$\int_{C_2} f(x)dx = \int_{C_4} f(x)dx = 0$

$C_1$: $c_1(t) = \begin{pmatrix}r\cos t\\ r\sin t\end{pmatrix}$ $\dot c_1(t) = \begin{pmatrix}-r\sin t\\ r\cos t\end{pmatrix}$

$f(c_1(t)) = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix}-r\sin t\\ r\cos t\end{pmatrix}$

$\langle f(c_1(t)), \dot c_1(t)\rangle = 1$

$\int_{C_1} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \langle\ ,\ \rangle dt = \pi$

$C_3$: $\int_{C_3} f(x)dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\langle\ ,\ \rangle}_{1} dt = -\pi$

d.h. $\int_C f(x)dx = 0$

rot $f$

Jan 20-12:48

**Beispiel:**
Wir betrachten wieder das Vektorfeld

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}, \qquad (x,y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Berechnet man die Rotation, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\text{rot}\left[\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right] &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\\ &= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

Die Rotation von $f(x,y)$ verschwindet zwar, aber $f(x,y)$ besitzt auf der
Menge $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ kein Potential.
Das Gebiet ist nämlich **nicht** einfach zusammenhängend.

154

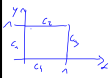
neues $D_1 =$

ein fach z.h.

$+ \text{rot } f = 0 \Longrightarrow \exists\varphi, \ f = \nabla\varphi$

Jan 20-12:59

Int satz von Green



$f(x,y) = \begin{pmatrix}a_1 + b_1x + c_1y\\ a_2 + b_2x + c_2y\end{pmatrix}$

$c_1(t) = \begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$ $\dot c_1(t) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\langle\ ,\ \rangle = a_1 + b_1t + c_1 \cdot 0$, $\int\langle\ ,\ \rangle dt = a_1 + \frac{b_1}{2}$ $C_1$

$-c_3(t) = \begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ $-\dot c_3(t) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\int\langle\ ,\ \rangle dt = \int a_2 + b_2 \cdot 1 + c_2 t = a_2 + b_2 + \frac{c_2}{2}$ $-C_3$

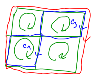
$c_2(t) = \begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$ $\dot c_2(t) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\int\langle\ ,\ \rangle dt = \int (a_1 + b_1t + c_1) = a_1 + \frac{b_1}{2} + c_1$ $C_2$

$-c_4(t) = \begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix}$ $\dot c_4(t) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\int\langle\ ,\ \rangle dt = a_2 + \frac{c_2}{2}$ $-C_4$

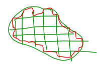
$\int_C f(x)dx = -b_2 + c_1$

$\oint_{\partial Q} f(x)dx = \int \text{rot } f\, dx$

$\int_Q \text{rot } f\, dx = b_2 - c_1$



$\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = \int_C$



Jan 20-13:10

$n \perp T$ $\quad T = \begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix}, n = \begin{pmatrix}T_2\\-T_1\end{pmatrix}$

**Andere Darstellungen des Integralsatzes von Green II:**
Ersetzt man in der obigen Gleichungen den Vektor $T$ durch den äußeren Normaleneinheitsvektor $n = (T_2, -T_1)^T$, so folgt

$$\begin{aligned}\oint_{\partial K} \langle f, n\rangle\, ds &= \oint_{\partial K} (f_1T_2 - f_2T_1) ds = \oint_{\partial K} \left\langle \begin{pmatrix}-f_2\\f_1\end{pmatrix}, T\right\rangle ds \stackrel{\text{Green}}{=}\\ &= \int_K \text{rot}\begin{pmatrix}-f_2\\f_1\end{pmatrix} dx = \int_K \text{div } f\, dx\end{aligned}$$

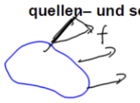
und damit die Beziehung

$$\int_K \text{div } f(x)\, dx = \oint_{\partial K} \langle f, n\rangle\, ds$$

2dim ein Satz von Gauss

Die rechte Seite beschreibt den **Gesamtfluss** der Strömung durch den Rand von $K$. Gilt also $\text{div } f(x) = 0$, so ist die Strömung **quellen– und senkenfrei.**

157

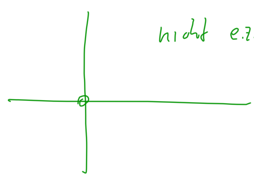


$\text{rot}\begin{pmatrix}f_2\\f_1\end{pmatrix} = \partial_x f_1 - \partial_y(-f_2) = \partial_x f_1 + \partial_y f_2 = \text{div}\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$

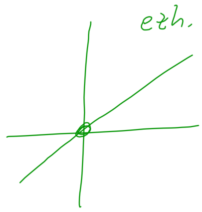
Jan 20-13:34

e.z.h

nicht e.z.h



e.z.h. !!



$n=2$ $\quad \begin{pmatrix}\partial_x f_1 & \partial_y f_1\\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2\end{pmatrix}$ $\quad \text{rot } f = \partial_x f_2 - \partial_y f_1$

$n=3$ $\quad \begin{pmatrix}\partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_z f_1\\ \partial_x f_2 & & \\ \partial_x f_3 & & \end{pmatrix}$ $\quad \text{rot } f = \begin{pmatrix}\\ \\ \partial_y f_1 - \partial_x f_2\end{pmatrix}$

Jan 20-13:36

**Beispiel:**

Der Graph einer skalaren $C^1$–Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet, ist eine Fläche.

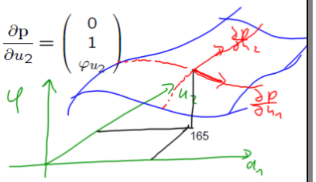
Eine Parametrisierung ist etwa gegeben durch

$$\mathrm{p}(u_1, u_2) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi(u_1, u_2) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{u} \in D$$

Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varphi_{u_1} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varphi_{u_2} \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig.




165

Jan 20-13:55

**Beispiel:**

Wir betrachten für gegebenes $r > 0$ die Abbildung

$$\mathrm{p}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \qquad (\varphi, z) \in \mathbb{R}^2$$

$u_1, u_2$

Die dadurch parametrisierte Fläche ist ein unbeschränkter Zylinder im $\mathbb{R}^3$.

Schränken wir den Definitionsbereich ein, etwa

$$(\varphi, z) \in K := [0, 2\pi] \times [0, H] \subset \mathbb{R}^2$$

so erhalten wir einen beschränkten Zylinder der Höhe $H$.

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$


164

Jan 20-14:00