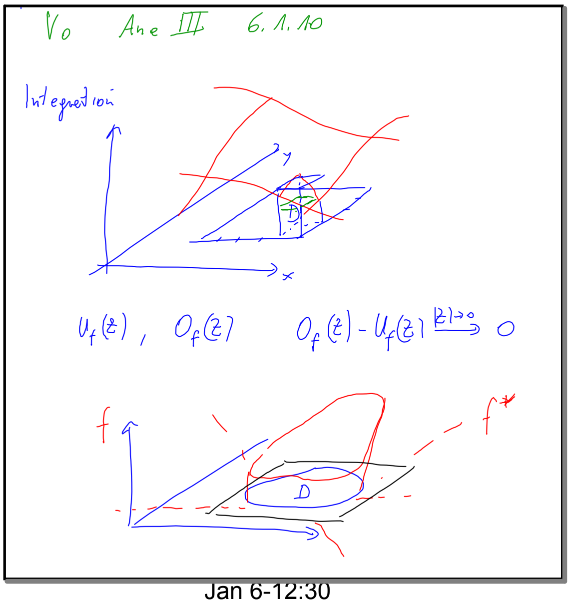


Jan 6-12:30

Definition:

1) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt ein **Normalbereich**, falls es stetige Funktionen g, h bzw. $\bar{g}, \bar{h}$ gibt mit

$$D = \{(x,y)\ :\ a \le x \le b \wedge g(x) \le y \le h(x)\}$$

bzw.

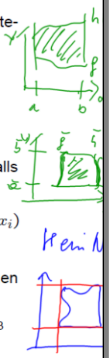
$$D = \{(x,y)\ :\ \bar{a} \le y \le \bar{b} \wedge \bar{g}(y) \le x \le \bar{h}(y)\}$$

2) Analog heißt eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ ein **Normalbereich**, falls es eine Darstellung

$$D = \{ (x_1,x_2,x_3)\ :\ a \le x_i \le b \quad \wedge \quad g(x_i) \le x_j \le h(x_i) \wedge \quad \varphi(x_i,x_j) \le x_k \le \psi(x_i,x_j) \}$$

gibt mit einer Permutation (i,j,k) von $(1,2,3)$ und stetigen Funktionen g, h, φ und ψ.

123



Jan 6-12:49

Definition: (Fortsetzung)

3) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **projizierbar** in Richtung x_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, falls es eine messbare Menge $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und stetige Funktionen φ, ψ gibt, so dass

$$D = \{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n\ :\ \tilde{\mathrm{x}} = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)^T \in B \wedge \varphi(\tilde{\mathrm{x}}) \le x_i \le \psi(\tilde{\mathrm{x}}) \}$$

Bemerkung:

1) Projizierbare Mengen sind stets messbar. Damit sind auch alle Normalbereiche messbar, denn sie sind projizierbar.

2) Häufig läßt sich der Integrationsbereich D als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche darstellen. Solche Bereich sind dann ebenfalls messbar.

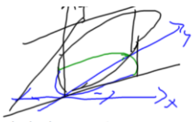
124

nach x pb.

nicht nach x pb

Jan 6-12:55

Beispiel: Gegeben sei die Funktion



$$f(x,y) := x + 2y$$

Berechne das Integral über der durch zwei Parabeln begrenzten Fläche

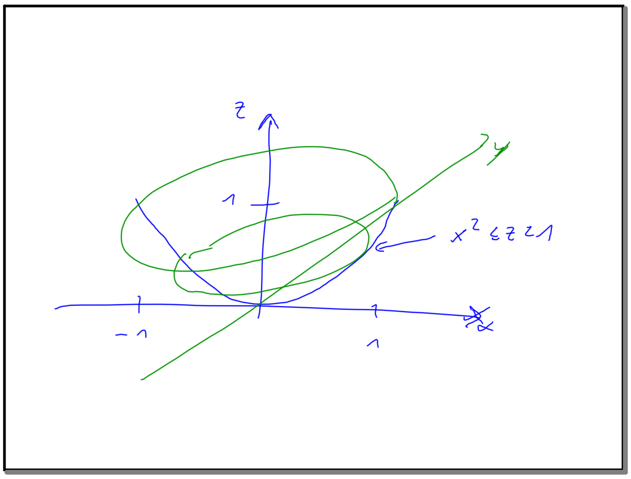
$$D := \{(x,y)\ :\ -1 \le x \le 1 \wedge x^2 \le y \le 2 - x^2\}$$

Die Menge D ist ein Normalbereich und $f(x,y)$ ist stetig:

$$\int_D f(x,y)dx = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x^2}(x+2y)dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left[xy+y^2\right]_{x^2}^{2-x^2}dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(x(2-x^2)+(2-x^2)^2-x^3-x^4)dx$$

Jan 6-12:56



Jan 6-13:06

Beispiel: Zu berechnen ist das Volumen des Rotationsparaboloids:

$$V := \{(x,y,z)^T\ :\ x^2+y^2 \le 1 \wedge x^2+y^2 \le z \le 1\}$$

Darstellung von V als **Normalbereich**

$$V := \{(x,y,z)^T\ :\ -1 \le x \le 1 \quad \wedge \quad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \quad \wedge \quad x^2+y^2 \le z \le 1\}$$

oder $-1 \le y \le 1 \wedge -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \wedge$ //

Damit gilt:

$$\mathrm{vol}(V) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{1} dzdydx = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)dydx$$

127

Jan 6-13:11

Beispiel: Zu berechnen ist das Volumen des Rotationsparaboloids:

$$V := \{(x,y,z)^T \;:\; x^2+y^2 \le 1 \wedge x^2+y^2 \le z \le 1\}$$

Darstellung von V als **Normalbereich**

$$V := \{(x,y,z)^T \;: \; -1 \le x \le 1 \;\wedge\; -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \;\wedge\; x^2+y^2 \le z \le 1\}$$

Damit gilt:

$$\text{vol}(V) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{1} 1 \, dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\,dy\,dx$$

127

Jan 6-13:14

Integration über allgemeine Integrationsbereiche

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte und messbare Menge.
Man nennt $Z = \{D_1, \ldots, D_m\}$ eine **allgemeine Zerlegung** von D, falls die Mengen D_k kompakt, messbar und zusammenhängend sind und

$$\bigcup_{j=1}^{m} D_j = D \qquad \text{und} \qquad \forall i \ne j \;:\; D_i^0 \cap D_j^0 = \emptyset$$

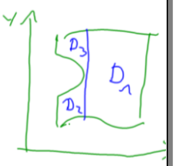
gelten.
Ferner heißt

$$\text{diam}\, D_j := \sup\{\, \|x-y\| \;:\; x, y \in D\,\}$$

der **Durchmesser** der Menge D_j und

$$\|Z\| := \max\{\, \text{diam}\, D_j \;:\; j = 1, \ldots, m\,\}$$

die **Feinheit** der allgemeinen Zerlegung Z.



128

Jan 6-13:18

Anwendungen der Bereichsintegrale auf die Berechnung von Schwerpunkten oder Trägheitsmomenten von Flächen und Körpern.

A) Schwerpunkt einer Fläche oder eines Körpers:

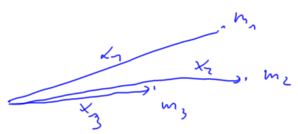
Definition:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) eine messbare Menge, $\rho(x)$, $x \in D$, eine vorgegebene Massendichte. Dann ist der Schwerpunkt der Fläche (bzw. des Körpers) D gegeben durch

$$x_s := \frac{\int_D \rho(x) x\, dx}{\int_D \rho(x)\, dx}$$

Das Zählerintegral (über eine vektorwertige Funktion) ist hierbei koordinatenweise zu berechnen.

$$x_s = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$



130

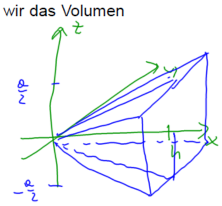
Jan 6-13:28

Beispiel: Zu berechnen ist der Schwerpunkt der Pyramide P:

$$P := \left\{ (x,y,z)^T \;:\; \max(|y|,|z|) \le \frac{ax}{2h}, \quad 0 \le x \le h \right\}$$

Unter der Annahme konstanter Dichte berechnen wir das Volumen von P: $\rho = 1$

$$\begin{aligned} \text{vol}(P) &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} dz\,dy\,dx \\ &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \frac{ax}{h}\, dy\,dx \\ &= \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \frac{1}{3}a^2 h \end{aligned}$$



131

Jan 6-13:32

B) Trägheitsmomente von Flächen oder Körpern:

Definition: (Trägheitsmoment bezüglich einer Achse)

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{R}^3$) eine messbare Menge, $\rho(x)$ bezeichne für $x \in D$ eine Massendichte und $r(x)$ den Abstand des Punktes $x \in D$ von einer vorgegebenen Drehachse.

Dann besitzt D bezüglich dieser Achse das Trägheitsmoment

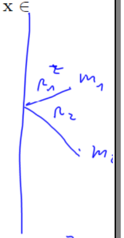
$$\Theta_{\text{Achse}} := \int_D \rho(x) r^2(x)\, dx$$

Beispiel: Gegeben sei der homogene Zylinder Z:

$$Z := \left\{ (x,y,z)^T \;:\; x^2+y^2 \le r^2, -l/2 \le z \le l/2 \right\}$$

Wir berechnen das Trägheitsmoment bezüglich der x–Achse:

$$\Theta_{x\text{–Achse}} = \int_Z \rho(y^2+z^2)\, d(x,y,z)$$



$\sum r_i^2 m_i$

133

Jan 6-13:37

Transformationssatz:

Dies verallgemeinert die Substitutionsregel aus Analysis II

Satz:

Sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^1–Abbildung. $D \subset U$ sei eine kompakte, messbare Menge, so dass Φ auf D^0 einen C^1–Diffeomorphismus bildet.

Dann ist auch $\Phi(D)$ kompakt und messbar, und für jede stetige Funktion $f : \Phi(D) \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{\Phi(D)} f(x)\,dx = \int_D f(\Phi(u))\, |\det J\Phi(u)|\, du$$

$u \in D$
$x \in \Phi(D)$

Bemerkung:

Man beachte, dass im Transformationssatz die Bijektivität von Φ nur

135

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(h(y))\, h'(y)\,dy$$

Jan 6-13:45

Bespiel: Berechne den Schwerpunkt eines homogenen Kugeloktanten:

$$V = \{(x, y, z,)^T : x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \wedge x, y, z \ge 0\}$$

Hier ist es einfacher den Schwerpunkt in Kugelkoordinaten zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ r\sin\varphi\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \psi)$$

Die Transformation ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert und mit

$$D = \underset{r}{[0,1]} \times \underset{\varphi}{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \times \underset{\psi}{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \qquad \text{Ändern!!}$$

gilt $\Phi(D) = V$.

Weiter ist Φ auf der offenen Menge D^0 ein C^1–Diffeomorphismus

136

Jan 6-13:49

und

$$\det J\Phi(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos\psi$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & \\ \sin\psi & 0 & \end{pmatrix}$$

Jan 6-13:52

Beispiel: **Der Steinersche Satz**

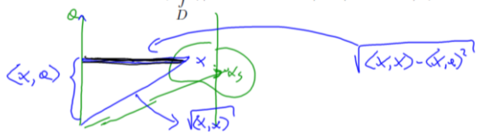
Für das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers K mit Gesamtmasse m gilt bezüglich einer vorgegebenen Drehachse A

$$\Theta_A = md^2 + \Theta_S$$

Hierbei ist S die zu A parallele Achse durch den Schwerpunkt x_s des Körpers K und d der Abstand des Schwerpunktes x_s von der Achse A.

Idee zur Herleitung: Setze $\mathrm{x} := \Phi(\mathrm{u}) = \mathrm{x}_s + \mathrm{u}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Theta_A &= \rho \int_K (\langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle - \langle \mathrm{x}, \mathrm{a}\rangle^2) d\mathrm{x} \\ &= \rho \int_D (\langle \mathrm{x}_s + \mathrm{u}, \mathrm{x}_s + \mathrm{u}\rangle - \langle \mathrm{x}_s + \mathrm{u}, \mathrm{a}\rangle^2) d\mathrm{x} \end{aligned}$$



138

Jan 6-14:01

Jan 6-14:01