Vo An III 9.12.09

Ziel: $f(x) = 0$

Suche x!!

Möglichkeit:

z.B. $x = x + f(x) = \phi_1(x)$

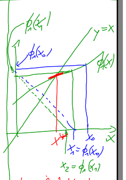
$x = \phi_1(x)$

Fixpunkt f.

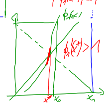
x_0 beliebig

Iterationsvorschrift $x^{k+1} = \phi_1(x^k)$

Hoffnung $x^k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$



o.k. weil $|\phi_1'(x^*)| < 1$



Banach:

*) $\|\phi(x) - \phi(y)\| \le L\|x-y\| \quad \forall x,y$ (Lipschitz)

*) $L < 1$ Kontrahierend

$\Rightarrow x^k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$

Nachteil

*) Konv. langsam

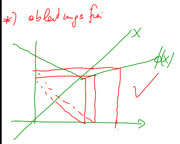
*) ϕ ist eindeutig

·) $x = x - f(x) = \phi_2(x)$

·) $f(x) + 1 = 1$

$x = \frac{x}{f(x)+1} = \phi_3(x)$

*) ableitungsfrei



Dez 9-12:34

Newton

$f(x) = 0$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$

ergibt:

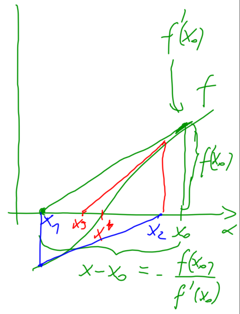
$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$(x - x_0) = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Wähle x_0

$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$

!) f', f differenzierbar



Dez 9-12:57

$\boxed{n > 1}$ Fixpunkt it

$f(x) = 0$

$f_1(x_1, x_2) = 0$

$f_2(x_1, x_2) = 0$

$f_1(x_1, x_2) + x_1 = x_1$

$f_2(x_1, x_2) + x_2 = x_2$

$\phi(x) = (x)$

Newton

$f(x) = 0 \qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \dots$

$-f(x_0) = \underbrace{Df(x_0)}_{n\times n \text{ Matrix}}(x - x_0) \qquad x - x_0 = (Df(x_0))^{-1} f(x_0)$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \Delta x^k = (Df(x^k))^{-1} f(x^k) \\ x^{k+1} = x^k + \Delta x^k \end{cases}$$

$f(x) = 0 \quad , \quad g(x) = Af(x) = 0$

$-g(x^k) = \underbrace{Dg(x^k)}(x^{k+1} - x^k)$

$Dg(x^k) = D(Af)(x^k) = ADf(x^k)$

$-Af(x^k) = ADf(x^k)(x^{k+1} - x^k) \quad / A^{-1}$

$-f(x^k) = Df(x^k)(x^{k+1} - x^k)$

Dez 9-13:05

Newton Bspl

$0 = f(x) = (x-1)^2 - 1$

$Df(x) = 2(x-1)$

$\underbrace{\left\| \frac{1}{2(x-1)} \left(2(y-1) - 2(x-1) \right) \right\|} \le L\|y - x\|$

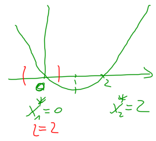
$\left| \frac{1}{(x-1)}(y - x) \right| \le L|y - x|$

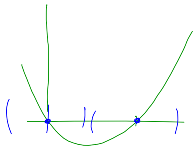
für $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad \left| \frac{1}{x-1} \right| \le 2$

für $x \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \quad \left| \frac{1}{x-1} \right| \le 2$

$\Rightarrow \|x^0 - 0\| < \frac{2}{L} = 1$ Konvergenz (quad.)

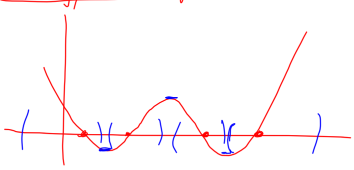
$|x^0 - 2| < 1$





Dez 9-13:22

eindeutig/mehrdeutig?



Dez 9-13:31

Satz: (Konvergenzsatz)

Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ eine C^1–Funktion, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Sei $x^* \in D$ mit $f(x^*) = 0$. Die Jacobi–Matrix $Jf(x)$ sei regulär für $x \in D$, und es gelte eine Lipschitz–Bedingung

$$\|(Jf(x)^{-1}(Jf(y) - Jf(x))\| \le L\|y - x\|$$

für alle $x, y \in D$ mit $L > 0$.
Für alle Startwerte $x^0 \in D$ mit

$$\|x^0 - x^*\| < \frac{2}{L} =: r \quad \text{und} \quad K_r(x^*) \subset D$$

ist dann das Newton–Verfahren wohldefiniert mit $x^k \in K_r(x^*)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, und die Newton–Iterierten x^k konvergieren **quadratisch** gegen x^*:

$$\|x^{k+1} - x^*\| \le \frac{L}{2}\|x^k - x^*\|^2$$

103

x^* eindeutig

Bew: $g(t) = (Jf(x))^{-1} f(x + t(y - x)) \qquad t \in [0,1]$

$g(0) = (Jf(x))^{-1} f(x)$

$g(1) = (Jf(x))^{-1} f(y)$

$g'(t) = (Jf(x))^{-1} Jf(x + t(y-x)) \cdot (y - x)$

$\|g'(t) - g'(0)\| = \|(Jf(x))^{-1} Jf(x + t(y-x))(y-x) - (Jf(x))^{-1} Jf(x)(y-x)\|$

$= \|(Jf(x))^{-1} [Jf(x + t(y-x)) - Jf(x)](x - y)\|$

$\le \|\dots\| \, \|x - y\|$

Voraus Satz $\le L\|x + t(y-x) - x\| \, \|x - y\|$

$\le Lt\|y - x\|\|x - y\| \qquad \le Lt\|y - x\|^2$

$\|(Jf(x))^{-1}(f(y) - f(x) - Jf(x)(y - x))\| = \|g(1) - g(0) - g'(0)\|$

$= \left\| \int_0^1 (g'(t) - g'(0))\,dt \right\| \le \int_0^1 \|g'(t) - g'(0)\|\,dt$

$\le L\|x - y\|^2 \int_0^1 t\,dt = \frac{L}{2}\|y - x\|^2$

$x^{k+1} - x^* \overset{\text{Newton}}{=} x^k - (Jf(x^k))^{-1} f(x^k) - x^*$

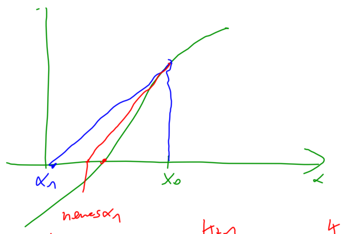
$= (Jf(x^k))^{-1}(f(x^*) - f(x^k)) + (Jf(x^k))^{-1} Jf(x^k)(x^k - x^*)$

$= (Jf(x^k))^{-1}(f(x^k) - f(x^*) + Jf(x^k)(x^k - x^*))$

$\|x^{k+1} - x^*\| \le \frac{L}{2}\|x^k - x^*\|^2$

Dez 9-13:31

gedämpft Newton



besser $x^{k+1} = x^k + \lambda \, \Delta x^k$

Dez 9-13:55

Ausgleichsproblem:

y data $\quad y \in \mathbb{R}^m$

$f = f(x)$ Model $\quad x \in \mathbb{R}^n \quad n \ll m$

$g(x) = \|f(x) - y\|_2^2 \longrightarrow$ minimal

$g(x) \approx \underbrace{\|f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) - y\|_2^2}_{\text{linear}}$ minimal

$\operatorname{grad} g(x) = \operatorname{grad} \left(f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) - y \right)^T (\quad)$

$= Df(x_0)^T (\quad) + (\quad)^T Df(x_0) \overset{!}{=} 0$

lineare Gleichungssystem

Dez 9-13:58