Auflösen:

·) $g(x,y) = x+y+2 = 0$

$x = -y-2$

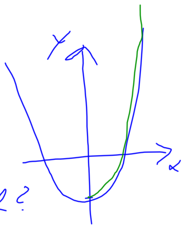
$y = -x-2$

·) $g(x,y) = y - x^2 + 3 = 0$

$y = x^2 - 3$

$x = ?$ global?

$x = \sqrt{y+3}$ für



Nov 25-12:28

Motivation

$g(x,y) = 0$ $\quad x \in R^{n-m},\ y \in R^m,\ (x,y) \in R^n$

$g: \underbrace{R^{n-m} \times R^m}_{R^n} \longrightarrow R^m$ $\quad$ vorher $x^{(1)} = x$, $x^{(2)} = y$

auflösen um (x_0, y_0)

$$0 = g(x,y) = \underbrace{g(x_0,y_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}(x-x_0) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}(y-y_0) + \dots$$

$$\boxed{m \times (n-m)} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-m}} \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_{n-m}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \\ & m \times m \\ & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

$$h(x,y) = h(x_0,y_0) + \operatorname{grad} h(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} =$$

$$= h(x_0,y_0) + \operatorname{grad}_x h(x_0,y_0)(x-x_0) + \operatorname{grad}_y h(x_0,y_0)(y-y_0) + \dots$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

auflösen falls $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)$ invertierbar

$$\Rightarrow y = y_0 - \left[\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)$$

Nov 25-12:43

Satz über implizite Funktionen:

Sei $g : D \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathcal{C}^1$–Funktion, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Variablen in D seien (x, y) mit $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$ und $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^m$. Der Punkt $(\mathrm{x}^0, \mathrm{y}^0) \in D$ sei eine Lösung von $\mathrm{g}(\mathrm{x}^0, \mathrm{y}^0) = 0$. Falls

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{x}^0, \mathrm{y}^0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathrm{x}^0, \mathrm{y}^0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\mathrm{x}^0, \mathrm{y}^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\mathrm{x}^0, \mathrm{y}^0) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\mathrm{x}^0, \mathrm{y}^0) \end{pmatrix} \quad m \times m$$

regulär ist, gibt es Umgebungen U von x^0 und V von y^0, $U \times V \subset D$ und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion f : $U \to V$ mit $y = f(x)$

$$\boxed{\mathrm{f}(\mathrm{x}^0) = \mathrm{y}^0} \quad \text{und} \quad \mathrm{g}(\mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x})) = 0 \ (\forall \mathrm{x} \in U)$$

$g(x,y)$ $\qquad$ nichtlinear $\qquad$ 70

Nov 25-13:02

und

$$\underbrace{\mathrm{J}\,\mathrm{f}(\mathrm{x})}_{\text{"}\frac{\partial f}{\partial x}\text{"}} = -\underbrace{\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x}))\right)^{-1}} \underbrace{\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}, \mathrm{f}(\mathrm{x}))\right)}$$

$y_0 = f(x_0)$ $\qquad \partial f(x_0) = -\left[\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)$

S. i. F.

$0 = g(x, f(x)) = h(x)$ $\ \forall x \in U$ $\quad x \in R^{m-n}$, $g \in R^m$

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{I} + \frac{\partial g}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{\frac{\partial f}{\partial x}} = \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}}_{m \times (n-m)} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}}_{m \times m} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{m \times (n-m)}$$

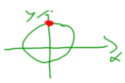
$m \times (n-m)$

$$\Rightarrow \boxed{\partial f = \frac{\partial f}{\partial x} = -\left[\frac{\partial g}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}}$$

Nov 25-13:05

Klicken Sie mit der Maus, um zur nächsten Seite im Dokument zu wechseln.

$n = 2 \quad m = 1$
$n - m = 1$



Beispiele:

1) Für die Kreisgleichung $g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad r > 0$ findet
man im Punkt $(x^0, y^0) = (0, r)$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,r) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,r) = 2r \neq 0$$

Man kann also in einer Umgebung von $(0, r)$ die Kreisgleichung nach y auflösen:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Die Ableitung $f'(x)$ kann man durch **implizite Diffentiation** berechnen:

$$g(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_x(x,y) + g_y(x,y)y'(x) = 0$$

$2x + 2y\,y' = 0$ $\qquad$ 71

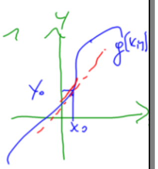
$y' = -\frac{x}{y}$, $\ y'(0) = -\frac{0}{R} = 0$

Nov 25-13:15

Beispiele: (Fortsetzung) $\qquad n = 2 \quad m = 1$

2) Betrachte die Gleichung

$$g(x,y) = e^{y-x} + 3y + x^2 - 1 = 0$$



Es gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = e^{y-x} + 3 > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Die Gleichung ist also für jedes $x \in \mathbb{R}$ nach $y =: f(x)$ auflösbar und $f(x)$ ist eine stetig differenzierbare Funktion.

Implizite Differentiation:

$g_x + g_y y' = 0$

$$e^{y-x}(y'-1) + 3y' + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{e^{y-x} - 2x}{e^{y-x} + 3}$$

f nicht expl. bekannt

Eine **explizite** Auflösung nach y ist in diesem Fall nicht möglich!

72

Nov 25-13:20

$$f'(x) = -\frac{g_x}{g_y} = -\frac{g_x(x, f(x))}{g_y(x, f(x))}$$

$$f''(x) = -\frac{(g_{xx} + g_{xy} f')g_y - g_x(g_{yx} + g_{yy} f')}{g_y^2(x, f(x))}$$

$$= -\frac{g_{xx} g_y - g_{xy} g_y \frac{g_x}{g_y} - g_x g_{yx} + g_x g_{yy} \frac{g_x}{g_y}}{g_y}$$

$$= \ldots$$

Nov 25-13:21

$g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$

$(0, r)$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2$

$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$

$f''(0) = -\frac{2}{2r} < 0$

Max

Bemerkung: Implizites Differenzieren einer durch

$$g(x,y) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$$

implizit definierten Funktion $y = f(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt:

$$f'(x) = -\frac{g_x}{g_y}$$

$$\boxed{f''(x) = -\frac{g_{xx} g_y^2 - 2 g_{xy} g_x g_y + g_{yy} g_x^2}{g_y^3}}$$

Daher ist der Punkt x^0 ein stationärer Punkt von $f(x)$, falls gilt:

$$g(x^0, y^0) = g_x(x^0, y^0) = 0 \quad \text{und} \quad g_y(x^0, y^0) \neq 0$$

Weiter ist x^0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum), falls

$$\frac{g_{xx}(x^0, y^0)}{g_y(x^0, y^0)} > 0 \qquad \left(\text{bzw. } \frac{g_{xx}(x^0, y^0)}{g_y(x^0, y^0)} < 0\right)$$

73

$f'(x_0) = 0$

$$f''\Big|_{g_x = 0} = -\frac{g_{xx}}{g_y}$$

Nov 25-13:29

Lemma:

Regulär

1) Gilt für einen regulären Punkt (x^0, y^0)

$$g_x(\mathrm{x}^0) = 0, \quad g_y(\mathrm{x}^0) \neq 0$$

nach y auflösbar

$y' = -\frac{g_x}{g_y} = 0$

so besitzt die Lösungskurve eine **horizontale Tangente** in x^0.

2) Gilt für einen regulären Punkt (x^0, y^0)

$$g_x(\mathrm{x}^0) \neq 0, \quad g_y(\mathrm{x}^0) = 0$$

nach x auflösbar

$x' = -\frac{g_y}{g_x} = 0$

so besitzt die Lösungskurve eine **vertikale Tangente** in x^0.

3) Ist x^0 ein **singulärer Punkt** so wird die Lösungsmenge bei x^0 durch folgende **quadratische Gleichung** approximiert:

$$g_{xx}(\mathrm{x}^0)(x - x^0)^2 + 2 g_{xy}(\mathrm{x}^0)(x - x^0)(y - y^0) + g_{yy}(\mathrm{x}^0)(y - y^0)^2 = 0$$

$$0 = g(x,y) = \underbrace{g(x_0, y_0)}_{=0} + \underbrace{g_x(x_0, y_0)}_{=0}(x - x_0) + \underbrace{g_y(x_0, y_0)}_{=0}(y - y_0) +$$

singulär

75

$$\frac{1}{2} g_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + g_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} g_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + \ldots$$

Nov 25-13:37

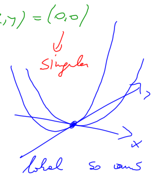
$g(x,y) = x^2 + y^2$

$g(x,y) = 0$ $\quad (x,y) = (0,0)$

Singulär

$\operatorname{grad} g(0,0) = 0$

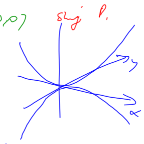
$$Hg(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



Isolierte Punkte sehen lokal so aus

$g(x,y) = x^2 - y^2 = 0$ $\quad (0,0)$ sing. P.

$$Hg(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

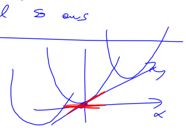


Doppelpunkt sieht lokal so aus

$g(x,y) = x^2$

$(0,0)$ sing. P.

$$Hg(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



1 Möglichkeit eines Rückkehrpunktes

Nov 25-13:39

Beispiele: Wir betrachten jeweils den singulären Punkt x^0:

1) Gegeben sei die implizite Gleichung

$$g(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x-2) = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned} g_x &= y^2 + 3x^2 - 4x \\ g_y &= 2y(x-1) \\ g_{xx} &= 6x - 4 \\ g_{xy} &= 2y \\ g_{yy} &= 2(x-1) \\ \mathrm{H}g(0) &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(0,0)$ Sing. P.

Also ist $\mathrm{x}^0 = 0$ ein isolierter Punkt.

lokal

Nov 25-13:47

ANALYSISIII.pdf - Adobe Reader

Beispiele: (Fortsetzung)

2) Gegeben sei die implizite Gleichung

$$g(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+q^2) = 0$$

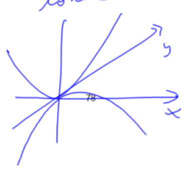
Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned} g_x &= y^2 + 3x^2 + 2xq^2 \\ g_y &= 2y(x-1) \\ g_{xx} &= 6x + 2q^2 \\ g_{xy} &= 2y \\ g_{yy} &= 2(x-1) \\ \mathrm{H}g(0) &= \begin{pmatrix} 2q^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(0,0)$ s.P.

Also ist $\mathrm{x}^0 = 0$ für $q \neq 0$ ein Doppelpunkt.

lokal



Nov 25-13:49

Beispiele: (Fortsetzung)

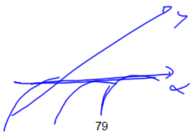
3) Gegeben sei die implizite Gleichung

$$g(x,y) = y^2(x-1) + x^3 = 0$$

Berechnung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$\begin{aligned} g_x &= y^2 + 3x^2 \\ g_y &= 2y(x-1) \\ g_{xx} &= 6x \\ g_{xy} &= 2y \\ g_{yy} &= 2(x-1) \\ \mathrm{H}g(0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{x}^0 = 0$ ein Rückkehrpunkt.



79

Nov 25-13:50

Implizite Darstellung von Flächen

Lösungsmenge einer skalaren Gleichung $g(x,y,z) = 0$ ist für grad $g \neq 0^T$ lokal eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Tangentialebene in x^0 mit $g(\mathrm{x}^0) = 0$ und grad $g(\mathrm{x}^0) \neq 0^T$:

$$\boxed{g_x(\mathrm{x}^0)(x - x^0) + g_y(\mathrm{x}^0)(y - y^0) + g_z(\mathrm{x}^0)(z - z_0) = 0} = \operatorname{grad} g(x^0) \cdot \begin{pmatrix} x- \\ y- \\ z- \end{pmatrix}$$

d.h. der Gradient steht senkrecht auf der Fläche $g(x,y,z) = 0$.

Ist zum Beispiel $g_z(\mathrm{x}^0) \neq 0$, so gibt es lokal bei x^0 eine Darstellung der Form

$$z = f(x,y)$$

Partielle Ableitungen von $f(x,y)$:

$$\text{grad } f(x,y) = (f_x, f_y) = -\frac{1}{g_z}(g_x, g_y) = \left(-\frac{g_x}{g_z}, \frac{g_y}{g_z}\right)$$

$g(x,y,f(x,y)) = 0$

$$\left.\begin{aligned} g_x + g_z f_x &= 0 \\ g_y + g_z f_y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = -\frac{1}{g_z}\begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$$

80

Nov 25-13:56

Das Umkehrproblem

Frage: Lässt sich ein vorgegebenes Gleichungssystem

$$\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$$

$m \overset{!}{=} n$

mit $\mathrm{f}: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, nach x auflösen, also **invertieren**?

Satz: Sei $\mathrm{f}: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine $\mathcal{C}^1$–Funktion.

Ist für ein $\mathrm{x}^0 \in D$ die Jacobi–Matrix $\mathrm{J\,f}(\mathrm{x}^0)$ regulär, so gibt es Umgebungen U und V von x^0 und $\mathrm{y}^0 = \mathrm{f}(\mathrm{x}^0)$, so dass f den Bereich U **bijektiv** auf V abbildet.

Die Umkehrfunktion $\mathrm{f}^{-1}: V \to U$ ist ebenfalls eine $\mathcal{C}^1$–Funktion und es gilt für alle $\mathrm{x} \in U$:

$$\boxed{\mathrm{J\,f}^{-1}(\mathrm{y}) = (\mathrm{J\,f}(\mathrm{x}))^{-1}, \quad \mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})}$$

Bemerkung: Man nennt dann f lokal einen $\mathcal{C}^1$–Diffeomorphismus.

81

Nov 25-13:58