Vo Ana III 11.11.09

·) partiell $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$

·) total diff $\Rightarrow$

$\underbrace{J f(x_0)}$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Matrix $m \times n$

$$J f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Nov 11-12:31

$$\boxed{D_v f(x_0)} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + sv) - f(x_0)}{s}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(x_0 + vt)}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ h)(t)\Big|_{t=0} =$$

$h(t) = x_0 + vt$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + (t+h)v) - f(x_0 + tv)}{h}\Big|_{t=0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

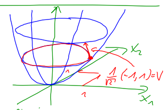
$\left. \begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \end{array} \right\} (f \circ h): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt}(f \circ h) = \underbrace{\underbrace{J f(h(t))}_{1 \times n} \cdot \underbrace{J h(t)}_{n \times 1}}_{1 \times 1} = \operatorname{grad} f(x_0 + tv) \cdot v \Big|_{t=0}$$

$$= \operatorname{grad} f(x_0) \cdot v$$

$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$

$\operatorname{grad} f = (x_1, x_2)$



$f(1,1) = 1$

$f(x_1, x_2) = 1 \Rightarrow$ Niveaulinien

$D_v f(1,1) = \operatorname{grad} f \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

$\tilde{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$D_{\tilde{v}} f(1,1) = \ldots\ldots = \sqrt{2}$

Nov 11-12:44

2) Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

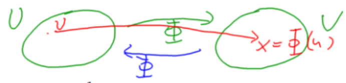
$$|D_v f(x^0)| \leq \|\operatorname{grad} f(x^0)\|_2$$

$D_v f(x_0) = \underline{\operatorname{grad} f(x_0)} \cdot \underline{v}$

für welche Richtung $\underline{v}$ ist $\underset{\text{maximal}}{\underline{D_v f(x_0)}}$

falls $\operatorname{grad} f(x_0) \parallel v$

Nov 11-13:02



Krummlinige Koordinaten

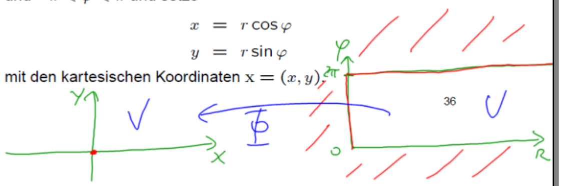
Sei $\Phi : U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine C^1–Abbildung, für die die Jacobimatrix $\underline{J\Phi(u^0)}$ an jeder Stelle $u^0 \in U$ regulär ist.
Weiter existiere die Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : V \to U$ und sei ebenfalls
eine C^1–Abbildung.
Dann definiert $x = \Phi(u)$ eine Koordinatentransformation von den Koordinaten u auf x.

Beispiel: **Polarkoordinaten**

Betrachte für $n = 2$ die (Polar)Koordinaten $u = (r, \varphi)$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi < \pi$ und setze

$$x = r \cos\varphi$$
$$y = r \sin\varphi$$

mit den kartesischen Koordinaten $x = (x, y)$.



36

Nov 11-13:06

Umrechung von partiellen Ableitungen von u auf x

Zunächst gelten für alle $u \in U$ mit $x = \Phi(u)$ die folgenden Relationen:

$\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\Phi^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\Phi^{-1}(\Phi(u)) = u$$
$$J\Phi^{-1}(x) \cdot J\Phi(u) = I_n \quad \text{(Kettenregel)}$$
$$J\Phi^{-1}(x) = (J\Phi(u))^{-1}$$

$f(u) = u$

$Jf = I$

Sei nun $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und setze

$$f(\Phi^{-1}(x)) = f(u) := \tilde{f}(\Phi(u)) = \tilde{f}(x)$$

Dann folgt aus der Kettenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i} =: \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

37

$$J(\phi^{-1}(\phi(u))) = \underbrace{\underbrace{J\phi^{-1}(\phi(u))}_{n \times n} \cdot \underbrace{J\phi(u)}_{n \times n}}_{n \times n}$$

Nov 11-13:14

z.B. Polark. $u = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

mit

$$\underline{g^{ij} := \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i}}, \quad G(u) := (g^{ij}) = (J\Phi(u))^T$$

$$(J\phi(u))_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial u_j}$$

Nov 11-13:16

Abkürzende Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_n} \end{pmatrix} = G(u) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Analog lassen sich die partiellen Ableitungen nach x_i durch die partiellen Ableitungen nach u_j ausdrücken:

$$G(u)^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j}$$

mit

$$(g_{ij}) := (g^{ij})^{-1} = (J\Phi)^{-T} = (J\Phi^{-1})^T$$

Man erhält diese Beziehungen durch Anwendung der Kettenregel auf die Funktion Φ^{-1}.

$$((J\phi)^T)^{-1}$$

38

Nov 11-13:19

Beispiel: (Polarkoordinaten) $u = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Wir betrachten die Polarkoordinaten

$$x = \Phi(u) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Dann berechnet man

$$J\Phi(u) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} \end{pmatrix}$$

und damit

$$(J\Phi)^T = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi \\ \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

39

Nov 11-13:21

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= \cos^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cos\varphi\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\cos\varphi\sin\varphi \frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}$$

$$+ \frac{1}{r}\sin^2\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}$$

$$+ \frac{1}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\sin^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$= \cos^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\sin 2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1}{r}\sin^2\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\sin^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Nov 11-12:49

ANALYSISIII.pdf - Adobe Reader

Die Umrechnung der partiellen Ableitungen lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Damit lässt sich etwa der **Laplace–Operator** auf Polarkoordinaten umrechnen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin(2\varphi)}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

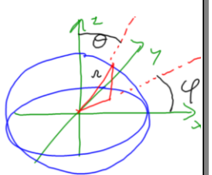
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

40

Nov 11-13:32

$r \in (0,\infty)$
$\varphi \in [0,2\pi]$
$\theta \in [0,\pi]$

Beispiel: (Kugelkoordinaten)

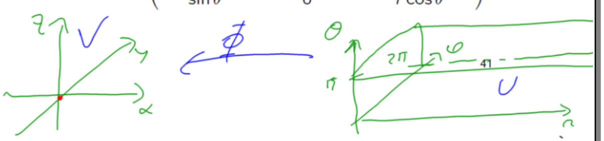


Wir betrachten die Kugelkoordinaten

$$x = \Phi(u) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Die Jacobi–Matrix ist dann gegeben durch:

$$J\Phi(u) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$



Nov 11-13:37

Partielle Ableitungen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = G(u) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\cos\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\sin\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Laplace–Operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\tan\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

42

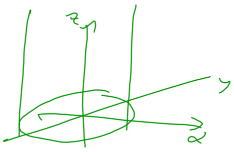
Nov 11-13:40

Zylinder Koord.

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$

$z = z$



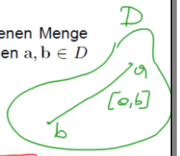
Nov 11-13:40

1.3 Mittelwertsätze und Taylor–Entwicklungen

Mittelwertsatz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbare, skalare Funktion. Ferner seien $a, b \in D$ Punkte in D, so dass die Verbindungsstrecke

$$[a, b] := \{a + t(b - a) \,:\, t \in [0, 1]\}$$

ganz in D liegt.



Dann gibt es eine Zahl $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\boxed{f(b) - f(a) = \text{grad}\, f(a + \theta(b - a)) \cdot (b - a)}$$

Beweis: Wir setzen

$$h(t) := f(a + t(b - a))$$

$h(0) = f(a),\ h(1) = f(b)$

Aus dem MWS für eine Veränderliche folgt dann mit der Kettenregel

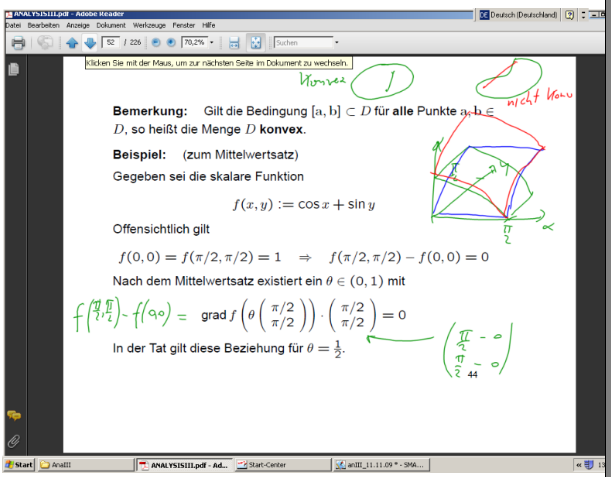
$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \underline{h(1) - h(0) = h'(\theta) \cdot (1 - 0)} \quad \text{MWS} \\ &= \text{grad}\, f(a + \theta(b - a)) \cdot (b - a) \end{aligned}$$

$h'(\theta) = \frac{d}{d\theta} h(\theta) = \frac{d}{d\theta} f(a+\theta(b-a)) = J f(a+\theta(b-a)) \cdot J(a+\theta(b-a))$

$= \text{grad}\, f(a+\theta(b-a)) \cdot (b-a)$

43

Nov 11-13:48



ANALYSISIII.pdf - Adobe Reader

Klicken Sie mit der Maus, um zur nächsten Seite im Dokument zu wechseln.

Bemerkung: Gilt die Bedingung $[a, b] \subset D$ für **alle** Punkte $a, b \in D$, so heißt die Menge D **konvex**.

Beispiel: (zum Mittelwertsatz)

Gegeben sei die skalare Funktion

$$f(x, y) := \cos x + \sin y$$

Offensichtlich gilt

$$f(0, 0) = f(\pi/2, \pi/2) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(\pi/2, \pi/2) - f(0, 0) = 0$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) - f(0,0) = \text{grad}\, f\left(\theta \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix} = 0$

In der Tat gilt diese Beziehung für $\theta = \frac{1}{2}$.

44

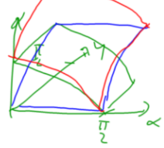
Nov 11-13:51

Klicken Sie mit der Maus, um zur nächsten Seite im Dokument zu wechseln.

Bemerkung: Gilt die Bedingung $[a, b] \subset D$ für **alle** Punkte $a, b \in D$, so heißt die Menge D **konvex**.

Beispiel: (zum Mittelwertsatz)

Gegeben sei die skalare Funktion



$$f(x, y) := \cos x + \sin y$$

Offensichtlich gilt

$$f(0, 0) = f(\pi/2, \pi/2) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(\pi/2, \pi/2) - f(0, 0) = 0$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$f\left(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) - f(0,0) = \text{grad}\, f\left(\theta \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} - 0 \\ \frac{\pi}{2} - 0 \end{pmatrix}$

In der Tat gilt diese Beziehung für $\theta = \frac{1}{2}$.

44

Nov 11-13:51

ACHTUNG:

Der Mittelwertsatz für mehrere Variablen gilt nur für **skalare** Funktionen!!!

Beispiel: Betrachte die **vektorwertige** Funktion

$$f(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, \pi/2]$$

Nun gilt

$$f(\pi/2) - f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

und

$$f'\left(\theta \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} -\sin(\theta\pi/2) \\ \cos(\theta\pi/2) \end{pmatrix} \qquad \frac{\pi}{2} \neq \sqrt{2}$$

$\|(\quad)\| = 1$

45

Nov 11-13:53

Taylor–Entwicklungen für skalare Funktionen mehrerer Variablen

Zunächst definieren wir einen sogenannten **Multiindex** $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ als

$$\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

Weiter sei

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \qquad \alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$$

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ $|\alpha|$–mal stetig differenzierbar, so setzen wir

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

wobei $D_i^{\alpha_i} = \underbrace{D_i \ldots D_i}_{\alpha_i\text{–mal}}$ und schreiben für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

$n = 2$ $\quad \alpha = (0,0)$ $\quad D^{(0,0)} f = f$

$\alpha = (1,0)$ $\quad D^{(1,0)} f = \frac{\partial}{\partial x} f$ $\quad D^{(0,1)} f = \frac{\partial}{\partial y} f$

$\alpha = (2,0)$
$\alpha = (1,1)$ $\quad D^{(1,1)} f = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f$ $\quad D^{(2,0)} f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f$

47

Nov 11-13:58