Analysis III, SS10, 21.09.2010, (Gasser)

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = y^2 \, .$$

a) Man berechne für f im Punkt $(0, 2)$ die Ableitung in Richtung $\boldsymbol{h} = (0, 1)^T$.

b) Man bestimme für f im Punkt $(x_0, y_0) = (-2, 0)$ die Gleichung der Tangentialebene.

c) Für f berechne man mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorregel auf der Menge $g(x, y) := x^2 + y^2 - 4 = 0$ alle Extremalkandidaten.

d) Man gebe an, welche der Extremalkandidaten aus c) Maxima und welche Minima sind.

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f}$ mit

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (1 + 4y + z\cos x, 2 + 4x + 3z^2, 3 + 6yz + \sin x)^T \, .$$

(i) Zu $\boldsymbol{f}$ existiert ein Potential. Man berechne es.

(ii) Für $\boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T$ mit $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ berechne man

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} \, .$$

b) Gegeben sei der Körper

$$R = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, 0 \le z \le 5 \ \wedge \ 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \right\} \, .$$

(i) Man skizziere R.

(ii) Man berechne die Masse von R mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.