Aufgabe 1) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x^2 + y^2 + \sin(x-y).$$

a) Berechnen Sie Gradient und Hessematrix von f.

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

c) T_2 besitzt ein lokales Extremum. Berechnen Sie dieses Extremum und stellen Sie fest, ob es sich um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt.

d) Zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \in D := [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ gilt:

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq 0.2$$

e) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil c) und d), dass der minimale Wert von f auf D nicht größer als -0.3 ist.

Lösung zu Aufgabe 1)

a) (2 Punkte)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + \cos(x-y) \\ 2y - \cos(x-y) \end{pmatrix},$$
$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 - \sin(x-y) & \sin(x-y) \\ \sin(x-y) & 2 - \sin(x-y) \end{pmatrix}.$$

b) (2 Punkt)

$$T_2(x,y) = x^2 + y^2 + (x-y).$$

c) (2 Punkte)
Notwendige Bedingung erster Ordnung:

$$\nabla T_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ 2y-1 \end{pmatrix} = (0,0)^\top$$

Daraus erhält man $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $y_1 = \frac{1}{2}$. $(x_1, y_1)^T$ ist lokales Minimum da die Hessematrix

$$HT_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

d) (2 Punkte)
Die dritten Ableitungen von f lauten alle $\pm\cos(x-y)$, sind also betragsmäßig nach oben durch $C := 1$ beschränkt.

$$|f(x,y) - T_2(x,y)| = |R_2(x,y)| \leq \frac{2^3}{3!}\|(x,y)\|_\infty^3 C \leq \frac{4}{3}\frac{1}{8} = \frac{1}{6} < 0.2$$

e) (2 Punkte)

$$T_2(x_1,y_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Nach Aufgabenteil c) wissen wir, dass gilt:

$$T_2(x_1,y_1) - 0.2 \leq f(x_1,y_1) \leq T_2(x_1,y_1) + 0.2$$

also $f(x_1,y_1) \leq -0.3$. Damit ist auch das Minimum von f kleiner als -0.3.

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D (\, x^2 \;-\; xy \;+\; y^2 \,)\, d(x,y)$$

über

$$D := \left\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \, 4 \;\leq\; x^2 + y^2 \;\leq\; 9, \quad x \;\leq\; 0, \quad y \geq\; 0 \right\}.$$

Hinweise: Polarkoordinaten! Es gilt $\sin(2\phi) \;=\; 2\,\sin(\phi)\cos(\phi)$.

b) Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{f}\,,\ \boldsymbol{g}\ :\ \mathbb{R}^2 \;\to\; \mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\boldsymbol{c}\ :\ [0, 2\pi] \;\to\; \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{c}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}\,.$$

(i) Berechnen Sie Potentiale zu $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$, falls dies möglich ist.

(ii) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}\,d\,\boldsymbol{x} \qquad \text{und} \qquad \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{g}\,d\,\boldsymbol{x}\,.$$

Lösungsskizze:

a) Übergang zu Polarkoordinaten:

$$D := \left\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2;\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \right\}.$$

$$g(u) = g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$det(Jg) = r \qquad \text{und} \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

Also $2 \le r \le 3$, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$ und

$$\begin{aligned}
\int_D (x^2 - xy + y^2)\, d(x,y) &= \int_2^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^2(\cos^2(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\varphi) + \sin^2(\varphi))\, r\, d\varphi\, dr \\
&= \int_2^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^3(1 - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)) d\varphi\, dr \\
&= \int_2^3 r^3 \left(\frac{\pi}{2} + \left[\frac{1}{4}\cos(2\varphi) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) dr \\
&= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \right) \left[\frac{r^4}{4} \right]_2^3 \\
&= \frac{\pi + 1}{2} \cdot \frac{81 - 16}{4} \qquad \text{[2 punkte]}
\end{aligned}$$

b) $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial y} = 2y \quad \neq \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial x} = y^2 \implies$ es gibt kein Potential zu $\boldsymbol{f}$.

$\phi(x,y) = xy^2$ ist ein Potential zu $\boldsymbol{g}$. [2 punkte]

c)

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} = \int_0^{2\pi} < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}(t)),\, \dot{\boldsymbol{c}}(t) > dt$$

$$\dot{\boldsymbol{c}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f} d\boldsymbol{x} &= \int_0^{2\pi} t^2(\cos t - \sin t)\, dt \\
&= t^2(\cos t + \sin t)\,\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t(\cos t + \sin t)\, dt \\
&= 4\pi^2 - [\, 2t(\sin t - \cos t)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2(\sin t - \cos t) dt = 4\pi^2 + 4\pi\,. \quad \text{[3 punkte]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{g} d\boldsymbol{x} &= \int_0^{2\pi} < \boldsymbol{g}(\boldsymbol{c}(t)),\, \dot{\boldsymbol{c}}(t) > dt \\
&= \phi(\cos(2\pi), 2\pi) - \phi(\cos(0), 0) = 4\pi^2\,. \quad \text{[1 punkt]}
\end{aligned}$$