Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2008/2009**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 7

Aufgabe 1:

Schreiben Sie folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ als (Vereinigung von) Normalbereiche(n) und skizzieren Sie diese.

Hinweis : Es genügt eine grobe Skizze per Hand.

$$M_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\, x \ge 0 \right\}$$

$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, (|x| + |y| \le 2) \wedge (x \ge 0 \vee |x| + |y| \ge 1) \right\}$$

$$M_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1,\, z \ge 0\,, y \le 0 \right\}$$

$$M_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| \le 2,\, |y| \le 2,\, 0 \le z \le 8 - x^2 - y^2 \right\}$$

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie das Volumen des Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$,

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle|\; |x| \le 1, \;\; -(1 - x^2) \le y \le 1 - x^2, \;\; 0 \le z \le \left(1 - x^2 - y\right) \right\}.$$

b) Gegeben sei die Menge

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{y^2}{2} - 2 \;\le\; x \;\le\; 4 - y^2 \right\}$$

Skizzieren Sie die Menge D und bestimmen Sie den Schwerpunkt von D bei homogener Dichte (Masse/Flächeneinheit) $\rho = 2$.

Hinweis: Es gilt

Masse: $M = \int_D \rho(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$

Schwerpunkt: $X_s = \frac{1}{M} \int_D \rho(\boldsymbol{x})\; \boldsymbol{x}\; d\boldsymbol{x}$ (komponentenweise)

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D (1-x^2)d(x,y)$$

über dem Kreisring

$$D := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

Hinweis: $\cos^2\phi = \frac{1}{2}(\cos(2\phi)+1)$.

b) Sei $K := \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0\right\}$. Berechnen Sie

$$\int_K (y^2 - x^2)\, d(x,y,z)$$

Hinweise:
- *Verwendung von Kugelkoordinaten spart Arbeit.*
- *Es gilt* $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei eine Platte in Form eines Parallelogramms:

$P = \left\{(x,y)^T,\ -2 \le y - x \le 1,\ -3 \le y + 3x \le 1\right\}$

Die Platte habe die Dichte (Masse/Flächeneinheit) $\rho = 2$.

Berechnen Sie das Trägheitsmoment von P bzgl. der x–Achse. Verwenden Sie dazu die Transformationsformel aus der Vorlesung mit $u := y - x$ und $v := y + 3x$.

Hinweis: Trägheitsmoment bzgl. einer Achse A:

$$\Theta_A = \int_D \rho(\boldsymbol{x})\, r^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \qquad r(\boldsymbol{x}) = \text{ Abstand von } \boldsymbol{x} \text{ zur Achse } A$$

Abgabetermine: 02.02. – 06.02.2009