Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2008/2009**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei das von einem Parameter $\alpha > 0$ abhängige Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \left(\frac{-y}{r^{2\alpha}}, \frac{x}{r^{2\alpha}}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad r^2 := x^2 + y^2 .$$

Für welche Parameter α ist das Vektorfeld quellenfrei ($\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0$)?
Gibt es ein α, so dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei ($\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(x,y) := (f_2)_x - (f_1)_y = \mathbf{0}$) wird?

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x^2 + y + 4z,\ y^2 + 2z + 5x,\ z^2 + 3x + 6y\,)^{\mathrm{T}.}$$

Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{f}) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}), \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f})$$

falls diese definiert sind. Einer der Ausdrücke verschwindet für die vorgegebene Funktion $\boldsymbol{f}$ identisch. Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass dieser Ausdruck nicht für beliebige $\boldsymbol{f}$ identisch verschwinded.

Aufgabe 2:

a) Prüfen Sie, welche der folgenden Vektorfelder $v^{[i]} : D \to \mathbb{R}^n, \quad n = 2$ bzw. 3, Potentiale besitzen und geben Sie gegebenenfalls jeweils ein Potential an.

$$\begin{aligned}
v^{[1]}(x,y) &= (-y, x)^T, \qquad D := \mathbb{R}^2 \\
v^{[2]}(x,y) &= (x^3, y^3)^T, \qquad D := \mathbb{R}^2 \\
v^{[3]}(x,y,z) &= (xy^2 + xz^2,\ yx^2 + yz^2,\ zy^2 + zx^2)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3 \\
v^{[4]}(x,y,z) &= (-y^2,\ xy,\ -2y)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3 \\
v^{[5]}(x,y,z) &= \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right)^T, \qquad D := \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie

$$\oint_C v^{[5]}(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

entlang des Kreises

$$c(t) = \big(\cos(t), \sin(t), 0\big) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 3) Berechnen Sie zu den unten angegebenen Kraftfeldern $\mathbf{K}$ und den jeweils angegebenen Kurven c die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve c von $c(a)$ nach $c(b)$ zu bewegen.

a) $\mathbf{K}(x,y) := (x^3, y^3)^T$,

$$c(t) = \left(t(t-4)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t\right)^T, \qquad t \in [a,b] := [0,4].$$

b) $\mathbf{K}(x,y,z) := (2x + yz\,,\, 2y + zx\,,\, 2z + xy)^T$,

$$c(t) = \left(\sin(t)\,,\, 1-\cos^2(t)\,,\, \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)^T \qquad t \in [a,b] := \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

c) $\mathbf{K}(x,y,z) := (-y^2\,,\, xy\,,\, -2y)^T$

$$c(t) = (2\cos(t),\, 2\sin(t),\, t)^T \qquad t \in [a,b] := [0\,,\, \frac{\pi}{2}].$$

Aufgabe 4:

Gegeben $\boldsymbol{f}\,,\, \boldsymbol{g} \,:\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x+1 \\ z+1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{g}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ze^x\cos y \\ -ze^x \sin y \\ e^x\cos y \end{pmatrix}$$

sowie die Kurven

$$\boldsymbol{c}_1 \,:\, [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{c}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c}_2 \,:\, [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{c}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{c}_2} \boldsymbol{f}\, d\boldsymbol{x}\,, \qquad \int_{\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{c}_2} \boldsymbol{g}\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Abgabetermine: 19.01. – 23.01.2009