**Department Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2008/2009**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

# Analysis III
# für Studierende der Ingenieurwissenschaften
## Blatt 5

**Aufgabe 1:**

a) Zeigen Sie, dass durch die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} \dfrac{x^2-5}{4} \; + \; y\cos(x-1) \; + \; xyz \\ xy\sin(z) \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in der Umgebung des Punktes $P := (1,1,0)^{\mathrm{T}}$ eine glatte Kurve im $\mathbb{R}^3$ bestimmt wird.

b) Läßt sich nach dem Satz über implizite Funktionen die Kurve nach jeder der Komponenten $x, y$ oder $z$ parametrisieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Tangente an die Kurve aus Teil a) im Punkt $P$. In welchen Punkten schneidet die Tangente die Ebenen $x = 0$ bzw. $y = 0$?

d) Wählen Sie auf der Tangente aus Teil c) einen Punkt $Q$ mit $\|P - Q\|_\infty = 0.1$ und berechnen Sie $F(Q)$.

**Aufgabe 2:** Gegeben sei $\quad F(x,y) := 4x^2y + 8x^4y^3 - 12 = 0\,.$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass $F(x,y)$ in der Nähe von $(x_0, y_0)^T := (1,1)^T$ nach $y$ aufgelöst werden kann. Das heißt, dass es eine Funktion $g(x)$ mit $g(1) = 1$ gibt, so dass in geeigneten Umgebungen von $x_0$ bzw. $y_0$ folgende Äquivalenz gilt:

$$F(x,y) = 0 \iff y = g(x)\,.$$

b) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $g$ aus Teil a) zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. *(Hinweis : implizite Differentiation)*

c) Sei $T_2$ das Polynom aus Teil b). Berechnen Sie $T_2(1.1)$ und $F(1.1, T_2(1.1))$.
Alternativ: Skizzieren Sie $T_1$, $T_2$ und $g$. Letzteres kann man in Matlab wie folgt erreichen:

Nach geeigneter Definition von $x$ und $y$

```
z=4*x.^2.*y+8*x.^4.*y.^3-12 ;
contour(x,y,z,[0 0])
```

**Aufgabe 3)**

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) \;=\; x \;-8y\;+\;z$$

auf dem Schnitt der beiden Kugeloberflächen

$$g(x,y,z) \;=\; x^2 \;+\; (y+4)^2 \;+\; z^2 \;-25 \;=\; 0$$

und

$$h(x,y,z) \;=\; x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2 \;-9 \;=\; 0.$$

**Aufgabe 4:**

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) \;:=\; x^2+y^2+z^2$$

unter den Nebenbedingungen $\boldsymbol{g}\,(x,y,z) = (0,0)^T$ , wobei

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) \;&:=\; x^2+y^2-z^2 \quad \text{und} \\ g_2(x,y,z) \;&:=\; x+2\sqrt{2}y+z-1\,. \end{aligned}$$

Gehen Sie hierzu folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie, dass alle zulässigen Punkte die Regularitätsbedingung (Rang $J(g_1,g_2)=2$ ) erfüllen.

b) Sei $\boldsymbol{x} := (x,y,z)^T$ . Bestimmen Sie alle stationären Punkte $\boldsymbol{x}^{[k]}$ der Lagrange-Funktion $F(\boldsymbol{x},\lambda,\mu)$ .

c) Untersuchen Sie für jeden stationären Punkt $\boldsymbol{x}^{[k]}$ die Hesse-Matrix $HF_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^{[k]})$ auf ihre Definitheit auf Ker D $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{[k]})$ .

**Abgabetermine:** 05.1. – 09.1.2009

*Das Mathe III Team wünscht Ihnen*
*ein frohes Weihnachtsfest*
*und ein gutes neues Jahr 2009 !*