Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2008/2009**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3

Aufgabe 1:

a) Bekanntlich gilt für $a,\, x \in \mathbb{R}: \quad (x \cdot a \cdot x)' = 2ax\,.$
Seien nun $\boldsymbol{x}\,, A,\ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad f(\,\boldsymbol{x}\,) := \boldsymbol{x}^{\,T} A\, \boldsymbol{x}\ .$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $Jf(\,\boldsymbol{x}\,)$ von f. Vergleichen Sie die Jacobi-Matrix mit den Matrizen

$$M_1(x) := [2 \cdot A\ \boldsymbol{x}\,]^T \quad \text{und } M_2(x) := [(A + A^T)\ \boldsymbol{x}\,]^T\,.$$

b) Die *Tangentialebene* an den Graphen einer differenzierbaren Funktion $f:\ D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x^0, y^0) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$ ist mit

$$t(x,y) \ := \ f(x^0,y^0) \ + \ f_x(x^0,y^0)\,(x - x^0) \ + \ f_y(x^0,y^0)\,(y - y^0)$$

gegeben durch

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ t(x,y) \end{pmatrix} \ : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D_f \right\}.$$

Sei $\tilde{f}$ in Polarkoordinaten gegeben:

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^+ \times [0,\, 2\pi] \to \mathbb{R}, \qquad f(r,\phi) = (1 + r^2) - 2r\cos\phi$$

Schreibt man $\tilde{f}$ in kartesische Koordinaten um, so erhält man eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad z = f(x,y)\,.$$

Berechnen Sie die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1,-1)^T$ und die Schnittmenge der Tangentialebene mit der $x-y-$ Ebene.

Aufgabe 2: Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen $z = f(x,y)$

(i) $\quad z \,=\, 8\,u^2 v \,-\, 2\,u \,+\, 3\,v, \quad u \,=\, x\,y, \quad v \,=\, x - y\,;$

(ii) $\quad z \,=\, u\,v\,w, \quad u \,=\, e^{x\,y}, \quad v \,=\, \sin x, \quad w \,=\, x^2 y\,.$

Aufgabe 3: [Klausur 2007, Struckmeier/Kiani, Aufgabe 1a] Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion

$$f(x,y) = xy + \cos(x)\, e^y$$

mit dem Entwicklungspunkt $\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und zeigen Sie, dass für alle

$$(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad |x| \le 0.05\,, \ |y| \le 0.2$$

die folgende Abschätzung gilt

$$|\, R_2\,(x,y;\mathbf{x_0})\,| := |\, f(x,y) - T_2\,(x,y;\mathbf{x_0})\,| \le 0.1\,.$$

.

Aufgabe 4: Gegeben seien die Punkte

$$P_1 = (\frac{\pi}{2}, 0)^T\,, \quad P_2 = (\pi, 0)^T\,, \quad P_3 = (0,0)^T\,,$$

sowie die Abbildung $f(x,y) := x^2 \cos(x+y)\,.$
Stellen Sie fest, welche der durch die Vektoren

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = (1, \frac{4}{3})^T\,, \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_2 = (-1,-1)^T\,, \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_3 = (0,1)\,,$$

gegebenen Richtungen in P_1 bzw. P_2 bzw. P_3 Anstiegs- oder Abstiegs- oder Tangentialrichtungen sind?

Abgabetermine: 24.–28.11.08 (zu Beginn der jeweiligen Übung)