Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2008/2009**
Prof. Dr. M. Hinze
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2

Aufgabe 1: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{(xy)^\alpha}{x^2+y^2}\,, & xy > 0 \\ 0\,, & xy \le 0 \end{cases}$$

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f partiell differenzierbar , aber nicht stetig in $(0,0)$.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist f stetig und partiell differenzierbar , aber nicht differenzierbar in $(0,0)$.

Hinweis zur Untersuchung der Stetigkeit: Polarkoordinaten!

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Jacobi–Matrizen folgender Funktionen und deren Determinanten. Für welche Werte der Variablen verschwindet die Determinante der Jacobi-Matrix?

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2r\cos\phi \\ 3r\sin\phi \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\theta \\ r\sin\phi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases} \qquad f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2r\cos\phi\cos\theta \\ 3r\sin\phi\cos\theta \\ 4r\sin\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_5 = \Phi \circ g \\ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & C^2 - \text{Funtion} \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 & \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad g,\, \Phi \quad C^2 - \text{Funktionen} \\ g(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} & \Phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \Phi(x_1,x_2) \end{cases}$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &:= xyz\,\sin(x+y+z), \qquad D_f := \mathbb{R}^3 \\ g(x,y) &:= \arctan\frac{y}{x} \qquad D_g := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u \,:\, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\,, \qquad u(x,t) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{t}}\,\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ löst. Skizzieren Sie die Lösung für mindestens vier verschiedene $t-$ Werte.

b) Seien $w(x,t)$ und $v(x,t)$ Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung. Zeigen Sie, dass dann

$$u(x,y,t) \;:=\; w(x,t)\cdot v(y,t)$$

die zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t \;=\; u_{xx} + u_{yy}$$

löst.

c) Geben Sie eine nichttriviale (d.h. nicht überall verschwindende) Lösung der zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung an.

Abgabetermine: 10.–14.11.08 (zu Beginn der jeweiligen Übung)