Analysis III

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

21. Januar 2009

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\rightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/

Buch Kap. 8.1 – Flächeninhalt ebener Bereiche

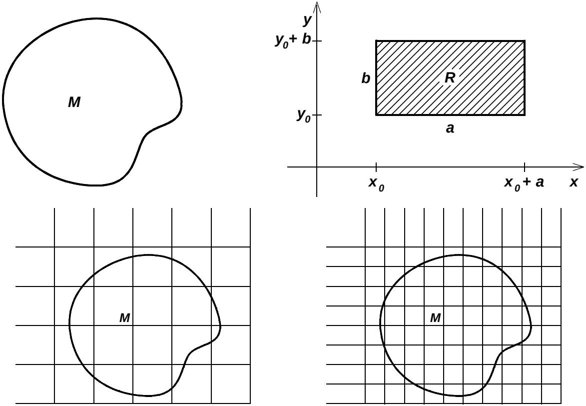

Abbildung 8.1-8.4: Punktmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ (ol), Rechteck (or), Gitter mit Maschenweite h (ul), mit Maschenweite $h/2$ (ur).

Buch Kap. 8.1 – Volumen

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Punktmenge und G_h Gitter über M mit Maschenweite $h > 0$. $s_h(M)$ bezeichne Fläche aller vollständig in M enthaltenen Maschen, $S_h(M)$ die Fläche aller Maschen, die wenigstens einen Punkt aus M enthalten. Mit

$$F_i(M) := \lim_{h \to 0} s_h(M) \text{ und } F_o(M) := \lim_{h \to 0} S_h(M)$$

heißt
Definition 8.1: die Menge M JORDAN-MESSBAR **gdw**

$$F_i(M) = F_o(M)$$

gilt.
In diesem Fall wird das Volumen der Menge M durch

$$F(M) := F_i(M) = F_o(M)$$

erklärt, wobei $F(\emptyset) := 0$. Eine JORDAN**-messbare Menge N mit $F(N) = 0$ wird eine** JORDAN**-Nullmenge genannt.**

Buch Kap. 8.1 – reguläre Bereiche

Definition 8.2: Eine beschränkte Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt regulärer Bereich, falls

a) **B abgeschlossen ist,**

b) **das Innere von B, also $B \setminus \partial B$, ein Gebiet ist und**

c) **der Rand ∂B von B aus endlich vielen regulären $n-1$-dimensionalen Hyperflächen besteht (die etwa als Graphen von glatten Funktionen darstellbar sind).**

Buch Kap. 8.2 – Durchmesser einer Menge

Definition 8.3: Unter dem Durchmesser einer Punktmenge C wollen wir

$$\mathbf{diam}(C) := \mathbf{sup}\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C\}$$

verstehen.

Buch Kap. 8.2 – Zerlegungen

Definition 8.4: Unter einer Zerlegung Z von B verstehen wir eine Familie

$$\{B_j | j = 1, ..., n\}$$

von regulären Teilbereichen mit den Eigenschaften

a) $\cup_{j=1}^{n} B_j = B$,
b) **für $i \neq j$ ist $B_i \cap B_j$ eine Nullmenge,**

wobei wir unter einer Familie eine Menge von Mengen verstehen wollen.
Die Feinheit $\delta(Z)$ einer Zerlegung Z ist durch

$$\delta(Z) := \max\{\mathrm{diam}(B_j) | j = 1, ..., n\}$$

definiert. Eine Folge (Z_k) von Zerlegungen heißt zulässig, falls

$$\lim_{k\to\infty} \delta(Z_k) = 0$$

gilt.

Buch Kap. 8.2 – Zerlegung

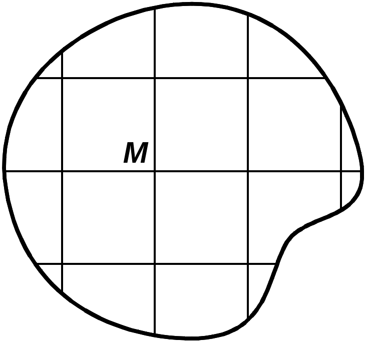

Abbildung 8.5: Zerlegung von $M \subset \mathbb{R}^2$

Buch Kap. 8.2 – Riemann'sche Zwischensumme

Definition 8.5: Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ist $Z = \{B_j | j = 1, ..., n\}$ eine Zerlegung von B und sind $\mathbf{x}_j \in B_j$ beliebige Punkte (sogenannte Zwischenpunkte), so heißt der Ausdruck

$$S(f, Z) = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{x}_j) F(B_j)$$

RIEMANN**sche Zwischensumme der Funktion f bezüglich der Zerlegung Z und der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$.**

Buch Kap. 8.2 – RIEMANNsches Flächenintegral

Satz 8.2: Ist f beschränkt und in B (möglicherweise mit Ausnahme einer Nullmenge) stetig, so

- **konvergiert die Folge der** RIEMANN**schen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede Folge zulässiger Zerlegungen (Z_k), und**

- **der Grenzwert**

$$I := \lim_{k\to\infty} S(f, Z_k)$$

ist unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Folge von Zerlegungen (Z_k) und von der Wahl der Zwischenpunkte.

Buch Kap. 8.2 – RIEMANNsches Flächenintegral

Definition 8.6: Unter den Voraussetzungen an f aus Satz 8.2 nennt man I das RIEMANN**sche Flächenintegral der Funktion f über den Bereich B, und man verwendet die Schreibweisen**

$$\int_B f\,dF = \int_B f(x)\,dF = \int_B f(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx_1 \dots dx_n := I,$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Buch Kap. 8.2 – Volumen

Satz 8.3:

a) **Für jeden Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ gilt offensichtlich**

$$\int_B 1\, dF = F(B) \text{ (Volumen von } B\text{).}$$

b) **Ist $f \geq 0$ und stetig, so beschreibt**

$$K = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)^t \in B;\ 0 \leq x_n \leq f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Das Integral $\int_B f\, dF$ definiert dann das Volumen $V(K)$ dieser Teilmenge.

Buch Kap. 8.2 – Eigenschaften des RIEMANN-Integrals

(i) $\int_B (f+g)\,dF = \int_B f\,dF + \int_B g\,dF$ **(Additivität des Integrals),**
$\int_B \alpha f\,dF = \alpha \int_B f\,dF$ **(Homogenität des Integrals),**

(ii) **Aus** $f \le g$ **folgt** $\int_B f\,dF \le \int_B g\,dF$ **(Monotonie des Integrals)**

(iv) **Wenn** B_1 **und** B_2 **zwei Bereiche mit** $B_1 \cup B_2 = B$ **und** $F(B_1 \cap B_2) = 0$ **sind, so gilt**

$$\int_{B_1} f\,dF + \int_{B_2} f\,dF = \int_B f\,dF \text{ (Bereichsadditivität}$$

(v) **Wenn** B **ein regulärer Bereich ist und** $f : B \to \mathbb{R}$ **stetig ist, so gibt es einen Punkt** $\mathrm{x}^* \in B$ **mit**

$$\int_B f\,dF = f(\mathrm{x}^*)F(B) \text{ (Mittelwertsatz der Integralrechnung).}$$

Buch Kap. 8.3 – Integration über Produktintervalle

Seien $a_i < b_i$ ($i = 1, \ldots, n$) Zahlen. Dann heißt

$$I := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \text{ Produktintervall.}$$

Satz (vergl. Satz 8.4, 8.16) Seien $I_x \subset \mathbb{R}^p$ und $I_y \subset \mathbb{R}^q$ Produktintervalle und $I := I_x \times I_y$. Ist f auf I R-integrierbar und existiert

$$g(y) := \int_{I_x} f(x, y)dx \text{ für jedes } y \in I_y,$$

so ist g auf I_y R-integrierbar und es gilt

$$\int_I f(x, y)d(x, y) = \int_{I_y} \left(\underbrace{\int_{I_x} f(x, y)dx}_{=g(y)} \right) dy.$$

Buch Kap. 8.3 – Integralberechnung über Normalbereiche

vergl. Satz 8.5: Sei B ein Normalbereich, d.h. mit dem Produktintervall $I_x \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und stetigen Funktionen $g, h : I_x \to \mathbb{R}$ gelte

$$B = \{(x, y)^t | x \in I_x, g(x) \le y \le h(x)\}$$

und $f : B \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gilt

$$\int_B f \, dF = \int_{I_x} [\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy] dx.$$

Buch Kap. 8.5 – Transformationsformel

vergl. Satz 8.9: Sei $g : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, injektiv und es gelte $\det Dg(x) > 0$ oder $\det Dg(x) < 0$ für alle $x \in G$. $T \subset G$ sei kompakt, Jordan-meßbar und $f : g(T) \to \mathbb{R}$ sei stetig.

Dann ist $g(T)$ Jordan-meßbar, f auf $g(T)$ R-integrierbar und es gilt

$$\int_{g(T)} f(x)dx = \int_T f(g(t))|\det Dg(t)|dt.$$