070109

4tw Hauptsatz für Potentialfelder

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängendes Gebiet, $F: D \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar. Dann

F Potentialfeld

gdw $\overbrace{DF(x) = DF(x)^t}^{\text{Integrabilitätsbedingung.}} \quad \forall x \in D$,

d.h. Jacobi Matrix symmetrisch

$n=3$: gleichbedeutend mit

$\operatorname{rot} F(x) = 0 \quad \forall x \in D$

① Bsp •) $n=3$

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 x_3^2 \cos(x_1 x_2) + 2x_1 x_2 \\ x_1 x_3^2 \cos(x_1 x_2) + x_1^2 + x_3 \\ 2x_3 \sin(x_1 x_2) + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

- $\operatorname{rot} F(x) = \begin{bmatrix} F_{2x_3} - F_{3x_2} \\ F_{3x_1} - F_{1x_3} \\ F_{1x_2} - F_{2x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow F$ Potentialfeld.

•) $n=2$, $F(x) = \frac{1}{|x|^2} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$,

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (nicht einfach zshgd)

$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.

07.01.09

Damit

$$\oint_\gamma F(x)\cdot dx = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 t+\cos^2 t}\begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0$$

$\Rightarrow$ F kein Potentialfeld in D.

Aber es gilt

$\nabla\phi = F$ mit

$\phi = \arctan\frac{x_2}{x_1} + C$

(1) und

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \frac{-2x_1x_2}{|x|^4} & \frac{x_2^2-x_1^2}{|x|^4} \\ \frac{x_2^2-x_1^2}{|x|^4} & -\frac{2x_1x_2}{|x|^4}\end{bmatrix}$$

symmetrisch. Daher: Voraussetzung "einfach zusammenhängend" ist wichtig!

Berechnung von Stammfunktion

f heißt Stammfunktion des VFes F, falls $\nabla f = F$. Eindeutig bis auf Konstanten.

070109

Konstruktion von Stammfunktionen

i) Kurvenintegral - Methode

$F: D \to \mathbb{R}^n$ VF (Potential)

$x_0 \in D$ fix und (für $t \in [0,1]$)

$$\gamma_x(t) := x_0 + t(x - x_0)$$

verläuft ganz in D.

$$f(x) := \int_{\gamma_x} F(x) \cdot dx$$

$$= \int_0^1 F(\underbrace{x_0 + t(x-x_0)}_{\gamma_x(t)}) \cdot \overbrace{(x-x_0)}^{\dot{\gamma}_x(t)} \, dt$$

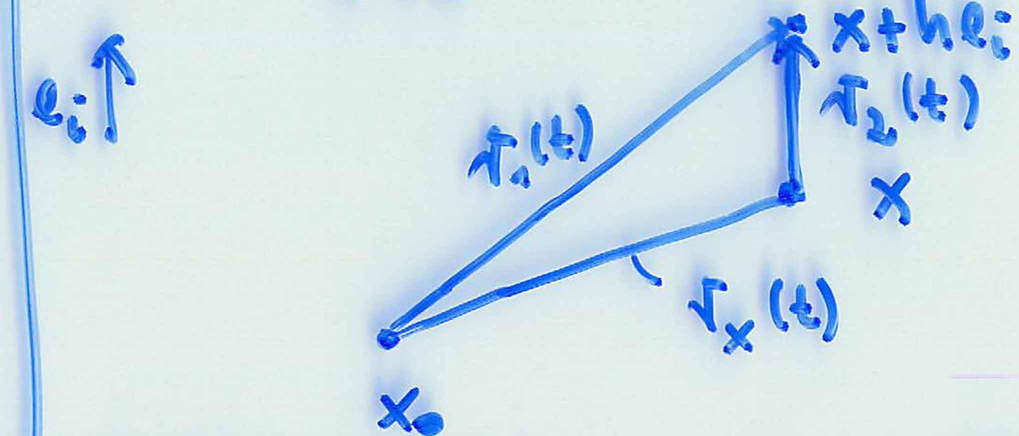
③ ist Stammfunktion zu F.

Nachzuweisen:

$$f_{x_i}(x) = F_i(x) \quad (i = 1, \dots, n),$$

denn dann $\nabla f(x) = F(x)$.

$$f_{x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$



$$\gamma_2(t) = x + t h e_i \qquad t \in [0,1]$$

07.01.09

$$f(x+he_i) = \int_{\Gamma_1} F(x) \cdot dx$$

$$\overset{F \text{ Potential}}{=} \underbrace{\int_{\Gamma_x} F(x) \cdot dx}_{f(x)} + \int_{\Gamma_2} F(x) \cdot dx$$

$$\Rightarrow$$

$$\overbrace{\frac{1}{h}\Big(f(x+he_i) - f(x)\Big)}^{\xrightarrow{h \to 0} f_{x_i}(x)} = \int_{\Gamma_2} F(x) \cdot dx \, \frac{1}{h}$$

$$= \int_0^1 \underbrace{F(x+the_i) \cdot he_i}_{h \, F_i(x+the_i)} \, dt \, \frac{1}{h}$$

$$\overset{\text{MWS}}{=} \frac{1}{h} h F_i(x + \tau h e_i) \qquad \tau \in [0,1]$$

$$= F_i(x + \tau h e_i) \xrightarrow{h \to 0} F_i(x)$$

④ iii) Ansatz Methode anhand eines Bsp:

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 x_3^2 \cos(x_1 x_2) + 2x_1 x_2 \\ x_1 x_3^2 \cos(x_1 x_2) + x_1^2 + x_3 \\ 2x_3 \sin(x_1 x_2) + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rot} F = 0 \Rightarrow \exists f : \nabla f = F$$

Bestimmen ein f:

$$F_i = f_{x_i} \qquad i = 1, \dots, 4$$

α.) $f_{x_1} \overset{!}{=} x_2 x_3^2 \cos(x_1 x_2) + 2x_1 x_2$

Integration nach x_1 (x_2, x_3 wie Konstanten behandeln!)

$$f(x) = \frac{x_2 x_3^2 \sin(x_1 x_2)}{x_2} + x_1^2 x_2 + C_1(x_2, x_3)$$

0701 pg

$$f(x) = \frac{x_2 x_3^2 \sin(x_1 x_2)}{x_2} + x_1^2 x_2 + \overbrace{C_1(x_2, x_3)}^{\text{Integrationskonst.}}$$

β) $f_{x_2} \overset{!}{=} x_1 x_3^2 \cos(x_1 x_2) + x_1^2 + x_3$

α.) f_{x_2} mit $f(x)$ aus α.)

$$\Rightarrow \cancel{x_3^2 x_1 \cos(x_1 x_2)} + \cancel{x_1^2} + C_{1x_2}(x_2, x_3)$$

$$= \cancel{x_1 x_3^2 \cos(x_1 x_2)} + \cancel{x_1^2} + x_3$$

$$\rightarrow C_{1x_2}(x_2, x_3) = x_3$$

$$\rightarrow C_1(x) = x_2 x_3 + D(x_3)$$

(5) γ.) $f_{x_3} = 2x_3 \sin(x_1 x_2) + x_2 + 2x_3$

α), β) $\Rightarrow \cancel{2x_3 \sin(x_1 x_2)} + \cancel{x_2} + D_{x_3}$

$$\overset{!}{=} \cancel{2x_3 \sin(x_1 x_2)} + \cancel{x_2} + 2x_3$$

$$\rightarrow D_{x_3} = 2x_3$$

$$\rightarrow D(x_3) = x_3^2 + \text{const}$$

$$\rightarrow$$

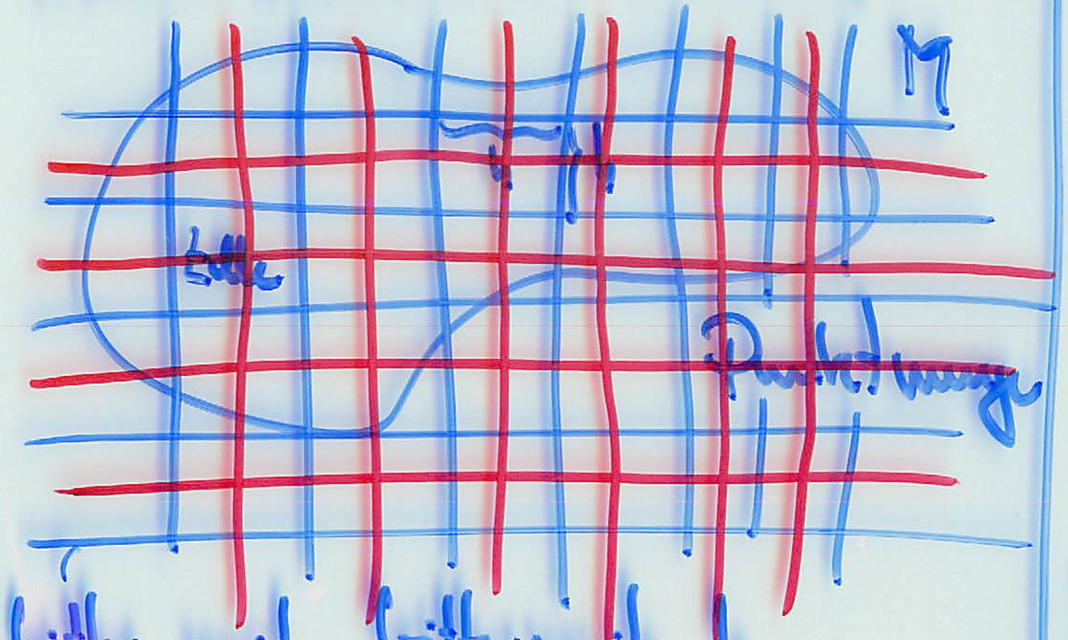
$$f(x) = x_3^2 \sin(x_1 x_2) + x_1^2 x_2 + x_2 x_3 + x_3^2 + \text{const}$$

und $\nabla f(x) = F(x)$.

07.01.09

Integration über mehrdimensionale Bereiche

Erstes Ziel: Volumenbestimmung krummberandeter Bereiche



G_h: Gitter mit Gitterweite h

$G_{h/2}$: Gitter mit Gitterweite $h/2$

① $h_k = 2^{-k}$ Gitterweite

$U_k(M)$ = Summe aller Volumina aller vollständig in M enthaltenen Zellen des Gitters G_{h_k}

$O_k(M)$ = Summe aller Volumina aller Zellen, die mindestens einen Punkt aus M enthalten.

Dann für alle k

$$U_k(M) \le U_{k+1}(M) \le O_{k+1}(M) \le O_k(M)$$

070109

Damit (Bolzano-Weierstraß) existieren

$U(M) := \lim\limits_{k \to \infty} U_k(M)$

$O(M) := \lim\limits_{k \to \infty} O_k(M)$

<u>Def.</u>: $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt Jordan-meßbar $:\Leftrightarrow$

$U(M) = O(M)$

$F(M) := O(M)$ heißt Flächeninhalt von M.

① Setzungen

i) $F(\emptyset) := 0$, $\emptyset$ leere Menge

ii) N Jordan meßbar mit $F(N) = 0$, so heißt N Jordan-Nullmenge.

<u>Beachte</u>: $U(M) < O(M)$ möglich, denn mit

$M := \{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x_1 \le 1,$
$x_2 = 0,\ x_1$ rational,
$x_2 = 1,\ x_1$ irrational $\}$

$\Rightarrow 0 = U(M) < O(M) = 1$