03.12.08

Implizite Funktionen

26.11.: $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ nachgewiesen

<u>ohne</u> die Ableitung der

$\sqrt{}$ - Funktion zu benutzen!

Hilfsmittel: Satz über implizite Funktionen angewendet auf

$F(x,y) = x^2+y^2-1 = 0.$

① Bsp "implizites Differenzieren"

$g(x) = \arcsin\sqrt{1-x^3}$, $y = g(x)$, $x \in (0,1)$

<u>Ziel</u>: Bestimme $g'(x)$, <u>ohne</u> Ableitung von arcsin zu benutzen.

$y = g(x) \rightarrow \sin y = \sqrt{1-x^3}$

$\rightarrow \underbrace{\sin^2 y - (1-x^3)}_{=: f(x,y)} = 0$

Differenziere die "0" nach x. Damit

$2 \sin y \cos y \, y' + 3x^2 = 0$

03.12.08

$\rightarrow \quad y' = g'(x) = \dfrac{-3x^2}{2 \sin y \cos y}$

NR: $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

$= \sqrt{x^3}$

Damit

$$g'(x) = \frac{-3x^2}{2\sqrt{x^3(1-x^3)}}$$

Extremalproblem mit Nebenbedingungen

$f: \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h: D \to \mathbb{R}^m$

mit $m \leq n$

② Nebenbedingungsmenge

$M := \{ x \in D ;\ h(x) = 0 \}$

Def.: $x_0 \in M$ heißt $\underbrace{\text{Maximal-}}_{\text{lokale}}$ (Minimal-) Stelle von f auf M: gdw in einer Umgebung $K_r(x_0) \subset D$ gilt

$$f(x_0) \underset{(\leq)}{\geq} f(x) \quad \forall_{x \in M \cap K_r(x_0)}$$

Bsp.: $f(x) = x_1^2 - x_2^2$

$M_1 = \{ x \in \mathbb{R}^2 ;\ x_2 = 0 \}$

$M_2 = \{ x \in \mathbb{R}^2 ,\ x_1 = 0 \}$

031208

Dann $x=0$

i) Sattelpunkt von f

ii) (lokales) Minimum von f auf M_1

iii) (lokales) Maximum von f auf M_2

Notwendige Optimalitäts-bedingung für Extremal- ($\hat{=}$ Minimal oder Maximal) Stellen und (Gleichungs-) Nebenbedingungen $h(x)=0$:

③ $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $h: D \to \mathbb{R}^m$, $m \le n$, stetig diffbar mit

$$\operatorname{rang} Dh(x) = m \quad \forall_{x \in D}$$

Ist $x_0 \in D$ Extremalstelle von f auf $M = \{x \in D;\ h(x) = 0\}$, so gibt es Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$ mit

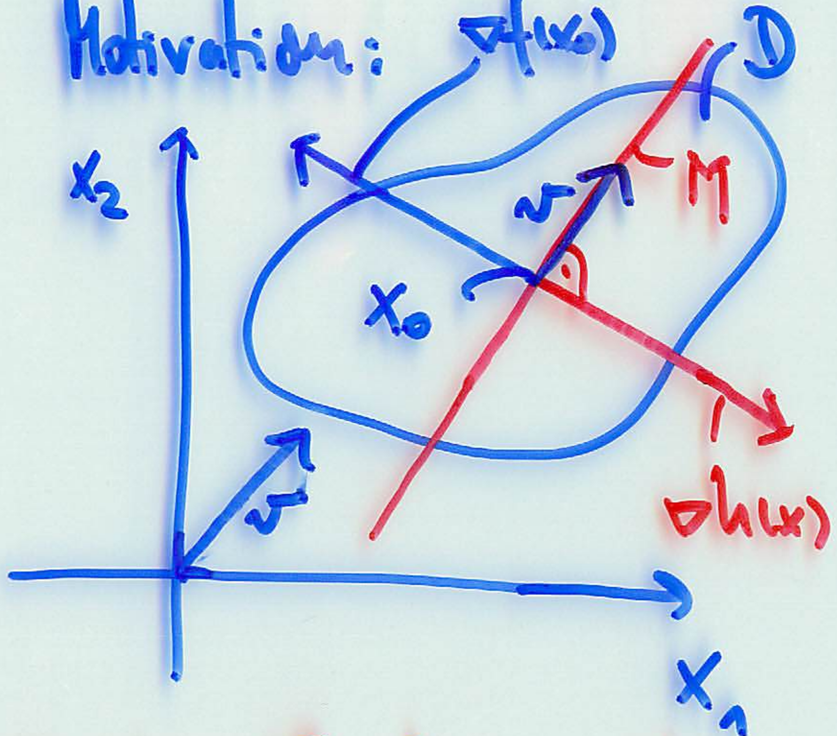
$$Df(x_0) = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m]\, Dh(x_0)$$

ausgeschrieben:

$$f_{x_j}(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \mu_k (h_k)_{x_j}(x_0), \quad j = 1, \dots, n$$

03.12.08

Motivation:



$M = \{x \in \mathbb{R}^2 ; \ h(x) = 0\}$

$h : D \to \mathbb{R}$

x_0 z.B. lokal minimal in M. Dann

$$\underbrace{\partial_v f(x_0)}_{\text{Richtungsableitung von } f \text{ in R. } v} = \nabla f(x_0)^t \cdot v = 0$$

④ d.h. $\nabla f(x_0) \perp v$, d.h. $\nabla f(x_0) \parallel \nabla h(x_0)$, weil $\nabla h(x_0) \perp M$, also hier $m = 1$!

$$\nabla f(x_0) = \mu \, \nabla h(x_0)$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ geeignet.

<u>Merke</u>: x_0 lokal extremal auf M $\Rightarrow \exists \, \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$:

$$\nabla f(x_0) = \nabla h(x_0) \, \mu$$

μ heißt Lagrange Multiplikator.

03.12.08

Bsp : i) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, $f(x) := x^t A x$,

$M := \{x \in \mathbb{R}^n ; \overbrace{|x|^2 - 1}^{=h(x)} = 0\}$

($\hat{=}$ Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$).

Ziel: Finde Extremalstellen x_0 von f auf M.

Notwendige Opt. Bed

$$\nabla f(x_0) = \mu_1 \nabla h(x_0)$$

mit $\mu_1 \in \mathbb{R}$, weil hier $m = 1$, denn $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

5 Hier gilt

$$Df(x_0) = 2 x_0^t A^t = \nabla f(x_0)^t$$

$$Dh(x_0) = 2 x_0^t = \nabla h(x_0)^t$$

Damit ergibt sich die Forderung

$$2 A x_0 = 2 \mu_1 x_0 ,$$

d.h. x_0 ist EV von A zum EW μ_1

Extremalstellen von f auf M sind die EVen von A, die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren sind die zugehörigen EWe

03.12.08

Es gilt

$$f(x_0) = x_0^t A x_0 = x_0^t \mu_1 x_0 = \mu_1 |x_0|^2 = \mu_1$$

d.h. f wird minimal auf M, falls x_0 EV zum kleinsten EW, maximal, falls x_0 EV zum größten EW von A.

<u>Bemerkung</u>: A nicht symmetrisch

$$\rightarrow \nabla f(x) = (A^t + A)x$$

⑥ Lagrange-Funktion

$$L(x, \mu_1, \dots, \mu_m) := f(x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k h_k(x)$$

heißt Lagrange Funktion zu

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{bei} \quad h(x) = 0$$

Beachte: erfüllt x $h(x) = 0$, so gilt $L(x, \mu_1, \dots, \mu_m) = f(x)$, weil dann $h_k(x) = 0$ $k = 1, 2, \dots, m$.

<u>Merke</u>: x_0 Extremalstelle von f auf M

$$\rightarrow \nabla L(x_0, \mu_1, \dots, \mu_m) = 0$$

03.12.08

$\nabla L = \nabla_{(x,\mu)} L$

$\nabla_x L(x_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$

$= \nabla f(x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \nabla h_k(x) = 0$

$\nabla_\mu L(x_0, \mu_1, \dots, \mu_m) = h(x_0) = 0$

Das entspricht notwendigen Optimalitätsbedingung !

<u>Bsp</u>: $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4$,

$h(x) = x_1^2 - x_2 - 2$

(7) $L(x, \mu) = f(x) - \mu h(x)$

$$\nabla L(x, \mu) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2\mu x_1 \\ 6x_2 + \mu \\ -(x_1^2 - x_2 - 2) \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 \neq 0 \longrightarrow \mu = 1, \quad x_2 = -1/6, \quad x_1^{1/2} = \pm\sqrt{\frac{11}{6}}$

$x_1 = 0 : \quad x_2 = -2, \quad \mu = 12$

Dabei

$\underbrace{P_1\left(\sqrt{\tfrac{11}{6}}, -\tfrac{1}{6}\right), \; P_2\left(-\sqrt{\tfrac{11}{6}}, -\tfrac{1}{6}\right)}_{\text{Minimalstellen}}$,

$P_3(0, -2)$ Maximalstelle

03.12.08

Wie bekommen wir heraus, welche Extremalstellen in M lokal minimal (maximal) sind?

__Beachte__: Ist $M = \{x; h(x) = 0\}$ kompakt, so nimmt f auf M Max. und Min. an.

Charakterisierung von Minimalstellen in M:

⑧ $f: D \to \mathbb{R}$, $h: D \to \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, 2 mal stetig diffbar, rang $Dh(x) = m$.

i) $x_0 \in D$ lok. Minimum auf $M = \{x; h(x) = 0\}$, so gilt $\nabla_{xx} L(x_0, \mu_1, \ldots, \mu_m)$ ist pos. semidefinit auf

$$\ker Dh(x_0) = \overbrace{\{w \in D;\ Dh(x_0)w = 0\}}^{\text{zulässige Richtungen}} \subset \mathbb{R}^n.$$

ii) $\to$ 10.12.08