19.11.08

Konsequenzen aus der Taylor-formel

$$f(a+h) = f(a) + (h\cdot\nabla) f(a) + \dots + (h\cdot\nabla)^k f(a)$$
$$\underbrace{+ \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} (h\cdot\nabla)^{k+1} f(a+sh)\, ds}_{=: R(a,h)}$$

Dann gilt

$$|R(a,h)| = \left| \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} (h\cdot\nabla)^{k+1} f(a+sh)\, ds \right|$$
$$\leq \int_0^1 \left|\frac{(1-s)^k}{k!}\right| \left|(h\cdot\nabla)^{k+1} f(a+sh)\right| ds$$
$$\leq \sup_{0\leq s\leq 1} \left|(h\cdot\nabla)^{k+1} f(a+sh)\right| \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!}\, ds$$

(1)

$$\leq \frac{|h|^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{0\leq s\leq 1} \sqrt{\sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_{k+1}=1}^{n} \left| \frac{\partial^{k+1}}{\partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}} f(a+sh)\right|^2}$$

Mittelwertsatz $\quad g(t) := f(a+th)$

mit $t\in[0,1]$. Dann $\xrightarrow{}$ MWS aus Analysis I

$$g(1) - g(0) = g'(\xi) \qquad \xi\in(0,1)$$

d.h. mit $g'(\xi) = (h\cdot\nabla) f(a+\xi h)$

$$f(a+h) - f(a) = (h\cdot\nabla) f(a+\xi h), \quad \xi\in(0,1)$$

$$\Rightarrow |f(a+h) - f(a)| \leq |h| \sup_{0\leq\xi\leq 1} |\nabla f(a+\xi h)|$$

d.h. relative Änderung der Funktionswerte wird beschrieben durch die erste Ableitung

19.11.08

Folgerung: $\nabla f(a)$ zeigt bei a in Richtung des stärksten Anstiegs von f.

$$f(a+th) - f(a) = g(t) - g(0)$$

$$\overset{MWS}{=} g'(s)(t-0) \quad \text{für } s \in (0,t)$$

$$= t\,(h\cdot\nabla)\,f(a+sh)$$

$$= t\,\nabla f(a+sh)^t\, h$$

$$= t\,|\nabla f(a+sh)|\,|h|\,\cos\sphericalangle(h, \nabla f(a+sh))$$

$$\overset{|h|=1}{=} t\,|\nabla f(a+sh)|\,\cos\sphericalangle(h, \nabla f(a+sh))$$

Damit $\dfrac{f(a+th)-f(a)}{t} = \boxed{|\nabla f(a+sh)|\cos\sphericalangle(h, \nabla f(a+sh))}$

② Für $t \to 0$: $\nabla f(a+sh) \to \nabla f(a)$ und $s \in (0,t)$.

Relative Änderung von f in Richtung h maximal, falls $h \parallel \nabla f(a)$, denn dann $\cos\sphericalangle(h, \nabla f(a)) = 1$.

$$\Longrightarrow h = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$$

Taylorpolynome für $k = 1, 2$

$k=1$: $f(a+h) = \underbrace{f(a) + (h\cdot\nabla)\,f(a)}_{T_1(a,h)} + R_1(a,h)$

$k=2$: $f(a+h) = \underbrace{f(a) + (h\cdot\nabla)\,f(a) + \tfrac{1}{2}(h\cdot\nabla)^2 f(a)}_{T_2(a,h)} + R_2(a,h)$

$T_1(a,h)$ beschreibt affin-lineare Approximation von f bei a.

19.11.08

$T_1(a,h) \;\hat{=}\;$ Modell erster Ordnung bzw lineares Modell von f bei a.

$$T_2(a,h) = f(a) + \nabla f(a)^t h + \frac{1}{2} h^t H_f(a) h$$

mit $H_f(a)$ Hessematrix von f bei a. Damit beschreibt $T_2(a,h)$ bei fixem a eine quadratische Funktion in den Veränderlichen h, das sogenannte quadratische Modell von f bei a.

(3)

Maxima und Minima bei Funktionen mit n Veränderlichen.

Def.: $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ sei hinreichend oft stetig partiell diffbar. $x_0 \in D$ heißt lokale Minimal- (Maximal-) Stelle von f :gdw

$$f(x_0) \underset{(\geq)}{\leq} f(x) \quad \forall x \in K_r(x_0),$$

wobei $K_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ |x - x_0| < r\}$

gilt "<" bzw ">", so heißen diese Extremalstellen echte lokale Minima bzw Maxima.

19.11.08

Notwendige Bedingungen für Extrema

i.) f partiell diffbar und $x_0 \in D$ Extremalstelle, so gilt

$$\nabla f(x_0) = 0,$$

d.h. sämtliche partielle Ableitungen von f verschwinden bei x_0.

ii) Sei f 2 mal stetig partiell diffbar bei x_0 und bei x_0 liege lokales $\left| \begin{matrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{matrix} \right\}$ vor. Dann $H_f(x_0)$ $\left| \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right|$ semidefinit.

(4) Nachweis zu

i.) $f(x_0) \leq f(x_0 + t e_i) \quad \forall_{t \in (-r,r)}$

mit e_i i-ter Einheitsvektor und x_0 lokal minimal.

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_0+te_i) - f(x_0)}{t} \quad \begin{matrix} \geq 0 & t > 0 \\ \leq 0 & t < 0 \end{matrix}$$

d.h. für $t \to 0$:

$$f_{x_i}(x_0) \geq 0 \quad \text{und} \quad f_{x_i}(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad f_{x_i}(x_0) = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

Alternativ: $g(t) = f(x_0 + t e_i)$.

$g : (-r, r) \to \mathbb{R}$ mit $g'(0) = f_{x_i}(x_0)$

x_0 minimal für f $\to$ 0 minimal für g

Erinnerung: Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv definit (und symmetrisch sei dabei vorausgesetzt!) gdw

$$x^t M x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

Positiv semidefinit gdw

$$x^t M x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

Negativ (semi) definit "$\geq$" $\rightsquigarrow$ "$\leq$"

Betrachte $g(t) = f(x_0 + th)$, $t \in (-r, r)$, h sei beliebige Richtung.

Dann gilt $g'(t) = (h\cdot\nabla) f(x_0 + th)$

$$g''(t) = (h\cdot\nabla)^2 f(x_0+th).$$

Dabei ist

$$g'(t) = (h\cdot\nabla) f(x_0+th) = \nabla f(x_0+th)^t h$$

und

$$g''(t) = (h\cdot\nabla)^2 f(x_0+th) = h^t H_f(x_0+th) h$$

Wir wissen: 0 lokale Minimalstelle von g ist, dann

$$g(0) = f(x_0) \leq f(x_0+th) = g(t)$$

für $t \in (-r, r)$ falls $|h| = 1$.

Damit $g'(0) = 0$ (notwendige Bed. erster Ordnung)

Damit gilt auch

$$f(x_0+th) = g(t) = g(0) + \underbrace{g'(0)}_{=0} t + \int_0^1 (1-s)\, g''(st)\, t^2\, ds$$

$$\overset{\text{MWS}}{\underset{\text{Integralrechnung}}{=}} g(0) + \frac{1}{2} t^2 g''(\xi t) \quad \xi \in (0,1)$$

13.11.08

$$= g(0) + \frac{1}{2}t^2 g''(\varkappa) \quad \varkappa \in (-r,r)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq g(t) - g(0)$$

$$= \frac{1}{2}t^2 g''(\varkappa), \quad \varkappa = \xi t, \quad \xi \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \quad g''(\varkappa) = h^t H_f(x_0 + \varkappa h)\, h$$

$$\geq 0 \quad \forall_{\varkappa \in (-r,r)}$$

$\Rightarrow$ $H_f(x_0)$ positiv semidefinit.

Hinreichende Optimalitätsbedingungen, d.h. Hinreichende Bedingungen für Extrema: $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ 2 x stetig partiell diffbar und $x_0 \in D$ erfülle $\nabla f(x_0) = 0$

(6)

Ist zudem $H_f(x_0)$ $\begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ definit, so liegt bei x_0 echte (strikte) $\begin{Bmatrix} \text{Minimal} \\ \text{Maximal} \end{Bmatrix}$ stelle vor.

<u>Nachweis</u>: $g''(0) > 0$, $g'(0) = 0$

$\xRightarrow{\text{Analysis I}}$ $g(t) > g(0) \quad \forall_{t \in (-r,r)}$

d.h. $f(x_0 + th) > f(x_0) \quad \forall_{t \in (-r,r)}$ und alle $|h| = 1$. Also x_0 echte lokale Minimalstelle. Maximalstellen analog.

<u>Bsp</u>: $f(x) = f(x_1,x_2) = e^{-(x_1^2+x_2^2)} = e^{-|x|^2}$

Damit $\nabla f(x) = -2\begin{bmatrix} x_1 e^{-|x|^2} \\ x_2 e^{-|x|^2} \end{bmatrix}$

13.11.08

Notwendige Bedingung erster Ordnung

$\nabla f(x) = 0$ falls $x_0 = (0,0)$.

x_0 ist **stationärer Punkt**

$$H_f(x_0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$ weil

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} (4x_1^2 - 2) & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 4x_2^2 - 2 \end{bmatrix} e^{-|x|^2}$$

Es gilt $H_f(x_0)$ negativ definit

$\Rightarrow$ x_0 echtes lokales Maximum

Ferner $f(x_0) > 0$ $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^4$,

d.h. x_0 Stelle globalen Maximums.

(7) Bsp: $f(x) = 3x_1x_2 - x_1^3 - x_2^3$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 3x_2 - 3x_1^2 \\ 3x_1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} -6x_1 & 3 \\ 3 & -6x_2 \end{bmatrix}$$

$\nabla f(x_0) = 0$ liefert $x_1 - x_1^4 = x_1(1 - x_1^3) = 0$

$\Rightarrow$ entweder $x_1 = 0$ oder $x_1 = 1$

stationären Punkte: $P_1(0,0)$, $P_2(1,1)$

Untersuchen P_2:

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$ negativ definit

Bei P_1: $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ weder positiv noch negativ definit, sondern indefinit