22.10.08

Analysis III

Einführung, Punktmengen im $\mathbb{R}^n$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

wobei $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ – i-te Komponente

$e_1, e_2, \dots, e_n$ bilden kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$

Lineare Algebra: Norm eines Vektors bekannt als Abbildung

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \; x \mapsto \|x\|$

(1)

(N1) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0$ gdw $x = 0$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Dreiecksungleichung

Bspe von Normen

i.) $\|x\|_\infty := \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ Maximum Norm

ii) $\|x\|_{\ell^p} := \left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$ ℓ^p-Norm

ii)' $p = 2$:

$\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$ Euklidische Norm

entspricht der Länge von x

221008

<u>Konvention</u>: Norm meint immer Euklidische Norm, falls nichts anders festgelegt wird

<u>Notation</u>: $\|x\|_2 \equiv \|x\| \equiv |x|$

<u>Mengen</u>, <u>Umgebungen</u>

Sei $\|\cdot\|$ Norm, $x^0 \in \mathbb{R}^n$

$K_r(x^0) := \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - x^0\| < r\}$

offene Kugel um x^0 mit Radius r (bzgl $\|\cdot\|$);

$\overline{K_r(x^0)} := \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - x^0\| \leq r\}$

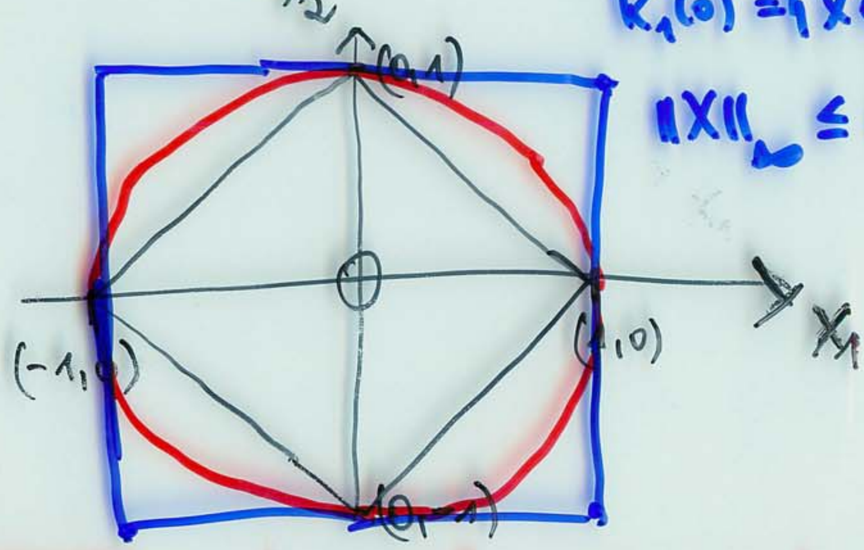
(2) abgeschlossene Kugel um x^0 mit Radius r (bzgl. $\|\cdot\|$)

<u>Bsp</u>: $K_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ bzgl $\|\cdot\|_1$

$\overline{K_1(0)} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; \|x - 0\|_1 \leq 1\}$

$\|x - 0\|_1 = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$

$\overline{K_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\|_\infty \leq 1\}$



$\overline{K_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 \leq 1\}$

221008

<u>Merke</u>: Im $\mathbb{R}^n$ (n-dim normierten Vektorräumen) sind alle Normen äquivalent, d.h. zu $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen gibt es Konstanten $c, C > 0$ s.d.

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq C\|x\| \quad \forall_{x\in\mathbb{R}^n}$$

$M \subset \mathbb{R}^n$ Menge

i.) M offen :gdw $\forall_{x\in M} \exists_{K_r(x)}: K_r(x) \subset M$

ii) $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen: gdw $M^c := \{x \in \mathbb{R}^n;\ x \notin M\}$ offen.

(3)

iii) M beschränkt: gdw

$$\exists_{C>0}: |x| \leq C \quad \forall x \in M$$

iv.) M kompakt: gdw M beschränkt <u>und</u> abgeschlossen.

<u>Punkte</u> <u>in</u> <u>Mengen</u>

i.) $x \in M$ innerer Punkt: gdw $\exists_{K_r(x)}: K_r(x) \subset M$

ii) $x \in M$ heißt Häufungspunkt von M: gdw $M \cap K_r(x) \neq \emptyset \ \forall_{K_r(x)}$

iii) $x \in M$ heißt Randpunkt: gdw $\forall_{K_r(x)}: K_r(x) \cap M \neq \emptyset$ und $K_r(x) \cap M^c \neq \emptyset$

22.10.08

Bsp $M := \{x \in \mathbb{R}^3 ; \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{c}\right)^2 < 1\}$

a, b, c reelle Zahlen, ~~nicht~~ positiv

Dann ist M offen und

$$|x| \leq \max\{a, b, c\} \quad \forall_{x \in M}$$

Folgen im $\mathbb{R}^n$, Grenzwerte

i.) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$;

$a^k \in \mathbb{R}^n$, $(a^k)_{k \in \mathbb{N}}$

heißt Folge, $a^k = (a_1^k, \dots, a_n^k)^t$

ii) $a^* \in \mathbb{R}^n$ heißt Grenzwert von $(a^k)_{k \in \mathbb{N}}$:gdw $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{k_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{k > k_\varepsilon}$:

$$|a^* - a^k| < \varepsilon .$$

(4)

Notation: $a^* = \lim\limits_{k \to \infty} a^k$

Bsp: $a^k = \left(\sqrt[k]{k}, \frac{k^2}{3k^2+5}, \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2} \right)^t$

Dann gilt

$$\lim_{k \to \infty} a^k = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \pi^2/6 \end{bmatrix}$$

Merke: $\lim\limits_{k \to \infty} a^k = a^*$ gdw

$$\begin{bmatrix} \lim\limits_{k \to \infty} a_1^k \\ \vdots \\ \lim\limits_{k \to \infty} a_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^* \\ \vdots \\ a_n^* \end{bmatrix}$$

Normkonvergenz
$\hat{=}$
Komponentenweise Konvergenz.

221008

Funktionen mit mehreren Veränderlichen

$D \subset \mathbb{R}^n$ Menge

$f: D \to \mathbb{R}^m$ ordnet jedem $x \in D$ genau ein $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$ zu.

Dann heißt f Funktion, D Definitionsbereich von f und

$W = f(D) = \{ y \in \mathbb{R}^m ; \exists_{x \in D} : y = f(x) \}$

Wertebereich von f.

⑤ Bspe

i.) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$x \mapsto f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ e^{x_2} x_1 \\ \sin x_1 \cos x_2 \end{bmatrix}$,

wobei $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

ii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \pi x_1 e^{x_2}$

Unterscheide $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^m$

i.) $n = 1$, $m \geq 2$: f Kurve

ii) $n \geq 1$, $m = 1$: f Skalarfeld

iii) $m \geq 2$: f Vektorfeld

221008

$f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ Skalarfeld

$g(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x \in D\}$

heißt ~~Graph~~ Graph von f und ist Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$

Niveau $\longrightarrow$ Beamer Folie

Stetigkeit: $D \subset \mathbb{R}^n$; $f: D \to \mathbb{R}$

i) f stetig in $x \in D$: gdw

$\boxed{\forall (x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D,\ \lim x^k = x : \lim f(x^k) = f(x)}$

ii) f stetig auf $A \subset D$: gdw

f stetig für jedes $x \in A$

⑥

iii) f stetig : gdw f stetig auf D.

Stetigkeit von Vektorfeldern

$$f: \mathbb{R}^n \supset D \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$$

stetig (in x (auf A)) gdw

$f_j : D \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, m)$

stetig (in x (auf A)).

Satz von Weierstraß : $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: D \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann existieren $x_{min}, x_{max} \in D$ mit

$$f(x_{min}) = \inf_{x\in D} f(x), \quad f(x_{max}) = \sup_{x \in D} f(x).$$

221008

Bsp : i.) Verkettungen elementarer Funktionen sind stetig

α.) $f(x) = (x_1^2 + x_2^2)\, e^{x_1 x_2} \quad D = \mathbb{R}^2$

β.) $f(x) = \dfrac{\sin(e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3})}{\ln(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$

$D = \mathbb{R}^3 \setminus \{ \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 ; |x| = 1\} \}$

γ.) $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}, \quad D = \mathbb{R}^2 = W$

δ.) $f(x) = \begin{bmatrix} e^{-x_2} \\ e^{x_3} \\ \sin(x_1 x_2 x_3) \end{bmatrix} \quad D = \mathbb{R}^3$

ii.) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & , x \neq 0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

(7)

Bh.: f stetig in 0 entlang der Geraden $x_2 = a x_1$, $a \in \mathbb{R}$

denn $x^k \to 0$ mit $x_2^k = a x_1^k$

$\Rightarrow f(x^k) = \dfrac{x_1^k (x_2^k)^2}{(x_1^k)^2 + (x_2^k)^4}$

$= \dfrac{a^2 (x_1^k)^3}{(x_1^k)^2 + a^4 (x_1^k)^4} \longrightarrow 0 \quad k \to \infty$

aber f nicht stetig in 0, denn mit $a^k := \begin{bmatrix} 1/k^2 \\ 1/k \end{bmatrix}$ gilt

$\lim_{k \to \infty} a^k = 0$

$\lim_{k \to \infty} f(a^k) = \lim_{k \to \infty} \dfrac{\frac{1}{k^4}}{\frac{2}{k^4}} = \frac{1}{2} \neq 0$

22.10.08

Differenzierbarkeit

$f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen

i) $x \in D$

$$f_{x_j}(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_j)-f(x)}{h}$$

existiert. Dann heißt f bei x partiell nach x_j diffbar, $f_{x_j}(x)$ heißt partielle Ableitung.

Motivation: $f(x) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$

$x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ fix

$g(z) := f(x_1, \dots, x_{j-1}, z, x_{j+1}, \dots, x_n)$

8

$g: \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$

$$g'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \dots, z+h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, z, \dots, x_n)}{h}$$

$$= f_{x_j}(x)$$

f heißt partiell diffbar bei x :gdw f bei x nach allen x_j diffbar.

f heißt stetig partiell diffbar :gdw f_{x_j} stetig $(j = 1, \dots, n)$

22.10.08

Bspe

i) $f(x) = x_1 \sin x_1 \cos(x_2 x_3)$

$f_{x_1}(x) = (\sin x_1 + x_1 \cos x_1) \cos(x_2 x_3)$

$f_{x_2}(x) = x_1 \sin x_1 (-x_3 \sin(x_2 x_3))$

$f_{x_3}(x) = x_1 \sin x_1 (-x_2 \sin(x_2 x_3))$