Bedingungen für Potentiale.

Bemerkung: Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^3$, ein C^1-Vektorfeld mit Potential $\varphi(\mathbf{x})$, so folgt:

$$\text{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \text{rot}(\nabla\varphi(\mathbf{x})) = 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in D.$$

Somit ist $\text{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$ eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials.

Definiert man für ein Vektorfeld $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$, die **skalare** Rotation

$$\text{rot}(\mathbf{f}(x, y)) := \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y),$$

so ist $\text{rot}(\mathbf{f}(x, y)) = 0$ auch in zwei Dimensionen eine notwendige Bedingung.

Die Bedingung

$$\text{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$$

ist sogar eine hinreichende Bedingung, falls das Gebiet D **einfach zusammenhängend** ist, d.h. keine “Löcher” enthält. □

Beispiel.

Wir betrachten erneut das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \qquad \text{für } (x,y)^T \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

Berechnet man die Rotation, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r^2}\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d.h. die Rotation von $\mathbf{f}(x,y)$ verschwindet.

Allerdings besitzt $\mathbf{f}(x,y)$ auf der Menge $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ kein Potential.

Das Gebiet D ist nämlich **nicht** einfach zusammenhängend. □

Der Integralsatz von Green.

Satz (Integralsatz von Green): *Sei* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *ein* C^1*-Vektorfeld auf dem Gebiet* $D \subset \mathbb{R}^2$. *Weiterhin sei* $K \subset D$ *kompakt und bezüglich beider Koordinaten projizierbar, so dass* K *von einer geschlossenen, stückweisen* C^1*-Kurve* $\mathbf{c}(t)$ *berandet wird. Die Parametrisierung von* $\mathbf{c}(t)$ *sei so gewählt, dass* K *stets links zur Durchlaufrichtung liegt (positiver Umlauf). Dann gilt:*

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_K \mathrm{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}.$$

Bemerkung: Der Greensche Integralsatz gilt auch für kompakte Bereiche K, die sich in *endlich* viele, bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbarer Teilbereiche zerlegen lassen, in so genannte Greensche Bereiche. $\square$

Beweis des Greenschen Integralsatzes.

Beweis: Mit den Bezeichnung der vorliegenden Skizze (z.B. im Lehrbuch) gilt

$$\begin{aligned}
\int_K \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x})\,dx\,dy \\
&= \int_c^d \left[f_2(h(y),y) - f_2(g(y),y)\right]\,dy \\
&= \oint_{\mathbf{c}} f_2(x,y)\,dy.
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\int_K \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = -\oint_{\mathbf{c}} f_1(x,y)\,dx,$$

und somit insgesamt

$$\int_K \operatorname{rot}(\mathbf{f}(x,y))\,d\mathbf{x} = \oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

$\blacksquare$

Alternative Formulierung des Greenschen Satzes I.

Wir hatten gesehen, dass die Beziehung

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \oint_{\mathbf{c}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle\, ds$$

gilt, wobei $\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{c}}(t)}{\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|}$ den Tangenteneinheitsvektor bezeichnet.

Daraus folgt mit dem Integralsatz von Green die Darstellung

$$\int_K \mathrm{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{T} \rangle\, ds$$

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Geschwindigkeitsfeld, so ist die durch $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ beschriebene Strömung unter der Bedingung $\mathrm{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$ wirbelfrei, denn

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

ist gerade die Zirkulation von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. $\square$

Alternative Formulierung des Greenschen Satzes II.

Ersetzt man in der obigen Gleichungen den Vektor $\mathbf{T}$ durch den äußeren Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = (T_2, -T_1)^T$, so folgt

$$\begin{aligned}\oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, ds &= \oint_{\partial K} (f_1 T_2 - f_2 T_1) \, ds = \oint_{\partial K} \left\langle \begin{bmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}, \mathbf{T} \right\rangle ds \\ &= \int_K \operatorname{rot} \begin{bmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{bmatrix} d\mathbf{x} = \int_K \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

und damit die Beziehung

$$\int_K \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \oint_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle \, ds$$

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, so beschreibt die rechte Seite den Gesamtfluss der Strömung durch den Rand von K. Gilt also $\operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$, so ist die Strömung quellenfrei und senkenfrei, d.h. divergenzfrei. □

Nochmal zurück zur Existenz von Potentialen.

Folgerung: *Ist* $\operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$ *für alle* $\mathbf{x} \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$ *ein Gebiet, so folgt*

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$$

für jede geschlossene stückweise C^1*-Kurve, die einen Greenschen Bereich* $B \subset D$ *vollständig umrandet.* □

Definition: *Ein Gebiet* $D \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* `einfach zusammenhängend`, *falls sich jede geschlossene Kurve* $\mathbf{c} : [a, b] \to D$ *stetig innerhalb von* D *auf einen Punkt in* D *zusammenziehen lässt. Genauer: Es gibt für ein* $\mathbf{x}^0 \in D$ *eine stetige Abbildung*

$$\Phi : [a, b] \times [0, 1] \to D$$

mit $\Phi(t, 0) = \mathbf{c}(t)$, *für alle* $t \in [a, b]$, *und* $\Phi(t, 1) = \mathbf{x}^0 \in D$ *für alle* $t \in [a, b]$. *Die Abbildung* $\Phi(t, s)$ *heißt* `Homotopie`. □

Integrabilitätsbedingung für Potentiale.

Satz: *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ein* C^1*-Vektorfeld* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ *besitzt genau dann ein Potential auf* D*, falls die* Integrabilitätsbedingung

$$\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))^T \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in D$$

erfüllt ist, d.h. falls gilt

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \qquad \text{für alle } 1 \leq j,k \leq n.$$

□

Bemerkung: *Für* $n = 2, 3$ *stimmt die Integrabilitätsbedingung mit*

$$\mathrm{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$$

überein. □

Beispiel.

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{2xy}{r^2} + \sin(z) \\ \log(r^2) + \dfrac{2y^2}{r^2} + ze^y \\ \dfrac{2yz}{r^2} + e^y + x\cos(z) \end{bmatrix}, \qquad \text{wobei } r^2 := x^2 + y^2 + z^2,$$

gegeben.

Wir wollen nun untersuchen, ob $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential besitzt.

Die Menge $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist offensichtlich einfach zusammenhängend. Weiterhin:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$$

Also besitzt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ein Potential.

Berechnung des Potentials.

Es muss gelten: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$. Demnach folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f_1(x, y, z) = \frac{2xy}{r^2} + \sin(z)$$

Durch Integration bezüglich der Variablen x ergibt sich:

$$\varphi(\mathbf{x}) = y\log(r^2) + x\sin(z) + c(y, z)$$

mit einer unbekannten Funktion $c(y, z)$.

Einsetzen in die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = f_2(x, y, z) = \log(r^2) + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y$$

liefert

$$\log(r^2) + \frac{2y^2}{r^2} + \frac{\partial c}{\partial y} = \log(r^2) + \frac{2y^2}{r^2} + ze^y.$$

Berechnung des Potentials (Fortsetzung).

Daraus folgt die Bedingung

$$\frac{\partial c}{\partial y} = z e^y$$

und somit gilt

$$c(y,z) = z e^y + d(z)$$

für eine unbekannte Funktion $d(z)$. Wir haben damit:

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \log(r^2) + x \sin(z) + z e^y + d(z).$$

Die letzte Bedingung lautet

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3(x,y,z) = \frac{2yz}{r^2} + e^y + x \cos(z)$$

Daraus folgt $d'(z) = 0$, und somit ist das Potential gegeben durch

$$\varphi(\mathbf{x}) = y \log(r^2) + x \sin(z) + z e^y + c \qquad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

□