Integration über allgemeine Integrationsbereiche.

Definition: *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *eine kompakte und messbare Menge. Man nennt* $Z = \{D_1, \ldots, D_m\}$ *eine* allgemeine Zerlegung *von* D, *falls die Mengen* D_k *kompakt, messbar und zusammenhängend sind und falls gilt*

$$\bigcup_{k=1}^{m} D_k = D \qquad \textit{und} \qquad D_i^0 \cap D_j^0 = \emptyset \text{ für alle } i \neq j.$$

Weiterhin heißt

$$\text{diam}(D_k) := \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_k\}$$

der Durchmesser *der Menge* D_k *und*

$$\|Z\| := \max\{\text{diam}(D_k) \mid 1 \leq k \leq m\}$$

die Feinheit *der allgemeinen Zerlegung Z.* □

Riemannsche Summen für allgemeine Zerlegungen.

Für eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definiert man die Riemannschen Summen

$$R_f(Z) = \sum_{j=1}^{m} f(\mathbf{x}^j)\mathrm{vol}(D_j)$$

mit beliebigen $\mathbf{x}^j \in D_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Satz: *Für jede Folge $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ allgemeiner Zerlegungen von D mit $\|Z_k\| \to 0$ (für $k \to \infty$) und für jede Folge zugehöriger Riemannscher Summen $R_f(Z_k)$ gilt*

$$\lim_{k \to \infty} R_f(Z_k) = \int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

□

Schwerpunkte von Flächen und Körpern.

Definition: *Sei* $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ *(bzw.* $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^3$*) eine messbare Menge und* $\rho(\mathbf{x})$*, für* $\mathbf{x} \in \mathrm{D}$*, eine vorgegebene Massendichte. Dann ist der* `Schwerpunkt` *der Fläche (bzw. des Körpers)* D *gegeben durch*

$$\mathbf{x}_s := \frac{\int_{\mathrm{D}} \rho(\mathbf{x})\mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{x}}{\int_{\mathrm{D}} \rho(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}}.$$

Zählerintegral (über vektorwertige Funktion) koordinatenweise zu berechnen. $\square$

Beispiel.

Zu berechnen ist der Schwerpunkt der Pyramide

$$P := \left\{ (x, y, z)^T \mid \max(|y|, |z|) \leq \frac{ax}{2h}, \quad 0 \leq x \leq h \right\}$$

Berechne das Volumen von P unter Annahme konstanter Dichte wie folgt.

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(P) &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} dz\,dy\,dx \\ &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \frac{ax}{h}\,dy\,dx \\ &= \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \frac{1}{3}a^2h. \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dz\,dy\,dx &= \int_0^h \int_{-\frac{ax}{2h}}^{\frac{ax}{2h}} \begin{bmatrix} \frac{ax^2}{h} \\ \frac{axy}{h} \\ 0 \end{bmatrix} dy\,dx \\
&= \int_0^h \begin{bmatrix} \frac{a^2x^3}{h^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dx \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}a^2h^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Der Schwerpunkt von P liegt daher im Punkt $\mathbf{x}_s = (\frac{3}{4}h, 0, 0)^T$. □

Trägheitsmomente von Flächen und Körpern.

Definition (Trägheitsmoment bezüglich einer Achse)**:** *Sei* $D \subset \mathbb{R}^2$ *(bzw.* $D \subset \mathbb{R}^3$*) eine messbare Menge,* $\rho(\mathbf{x})$ *bezeichne für* $\mathbf{x} \in D$ *eine Massendichte und* $r(\mathbf{x})$ *den Abstand des Punktes* $\mathbf{x} \in D$ *von einer vorgegebenen Drehachse. Dann besitzt* D *bezüglich dieser Achse das Trägheitsmoment*

$$\Theta := \int_D \rho(\mathbf{x}) r^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

$\square$

Beispiel. Berechnen das Trägheitsmoment des homogenen Zylinders

$$Z := \{\,(x,y,z)^T \;:\; x^2+y^2 \le r^2, -\ell/2 \le z \le \ell/2\}$$

bezüglich der x-Achse bei konstanter Dichte ρ wie folgt.

$$\begin{aligned}
\Theta &= \int_Z \rho(y^2+z^2)\, d(x,y,z) \\
&= \rho \int_Z (y^2+z^2) d(x,y,z) \\
&= \rho \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} (y^2+z^2)\, dz dy dx \\
&= \rho \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (\ell y^2 + \frac{\ell^3}{12})\, dy dx \\
&= \rho \frac{\pi \ell r^2}{12} (3r^2+\ell^2)
\end{aligned}$$

$\square$

Der Transformationssatz.

Ziel: Verallgemeinerung der (eindimensionalen) Substitutionsregel

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Satz (Transformationssatz): *Sei* $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen, eine* C^1*-Abbildung.* $D \subset U$ *sei eine kompakte messbare Menge, so dass* Φ *auf* D^0 *einen* C^1*-Diffeomorphismus bildet. Dann ist auch* $\Phi(D)$ *kompakt und messbar und für jede stetige Funktion* $f : \Phi(D) \to \mathbb{R}$ *gilt die* Transformationsformel

$$\int_{\Phi(D)} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_D f(\Phi(\mathbf{u}))\,|\det \mathbf{J}\Phi(\mathbf{u})|\,d\mathbf{u}.$$

$\square$

Bemerkung: Man beachte, dass im Transformationssatz die Bijektivität von Φ nur auf im Inneren D^0 von D gefordert wird – nicht jedoch auf dem Rand ∂D! $\square$

Beispiel.

Berechne den Schwerpunkt eines homogenen Kugeloktanten

$$V = \{(x, y, z,)^T \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } x, y, z \geq 0\}$$

Es ist einfacher, den Schwerpunkt in Kugelkoordinaten zu berechnen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos\varphi \cos\psi \\ r \sin\varphi \cos\psi \\ r \sin\psi \end{bmatrix} = \Phi(r, \varphi, \psi)$$

Die Transformation Φ ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert und mit

$$D = [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

gilt $\Phi(D) = V$. Weiterhin ist Φ auf D^0 ein C^1-Diffeomorphismus mit

$$\det \mathbf{J}\Phi(r, \varphi, \psi) = r^2 \cos\psi.$$

Fortsetzung des Beispiels.

Mit dem Transformationssatz gilt

$$\mathrm{vol}(V) = \int_V d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos\psi \, d\psi \, d\varphi \, dr = \frac{\pi}{6}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(V) \cdot x_s &= \int_V x \, d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (r \cos\varphi \cos\psi) r^2 \cos\psi \, d\psi \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^1 r^3 \, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\psi \, d\psi = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Daraus folgt $x_s = \frac{3}{8}$. Analog berechnet man $y_s = z_s = \frac{3}{8}$. □

Der Steinersche Satz.

Satz (Steinerscher Satz)**:** *Für das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers* K *mit Gesamtmasse* m *gilt bezüglich einer vorgegebenen Drehachse* A

$$\Theta_A = md^2 + \Theta_S.$$

Hierbei ist S *die zu* A *parallele Achse durch den Schwerpunkt* $\mathbf{x}_s$ *des Körpers* K *und* d *der Abstand des Schwerpunktes* $\mathbf{x}_s$ *von der Achse* A*.*

Beweis: Wende die Verschiebung $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{x}_s + \mathbf{u}$ an. Dann hat die verschobene Menge $D = \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_s \mid \mathbf{x} \in K\}$ den Schwerpunkt Null, d.h. es gilt

$$\int_D \mathbf{u}\, d\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Fortsetzung des Beweises.

Nun bezeichne **a** den Einheitsvektor in Richtung der Achse A. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\Theta_A &= \rho \int_K \left(< \mathbf{x}, \mathbf{x} > - < \mathbf{x}, \mathbf{a} >^2 \right) \, dx \\
&= \rho \int_D \left(< \mathbf{x}_s + \mathbf{u}, \mathbf{x}_s + \mathbf{u} > - < \mathbf{x}_s + \mathbf{u}, \mathbf{a} >^2 \right) \\
&= \rho \int_D \left(< \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s > + 2 < \mathbf{x}_s, \mathbf{u} > + < \mathbf{u}, \mathbf{u} > \right. \\
&\qquad \left. - < \mathbf{x}_s, \mathbf{a} >^2 - 2 < \mathbf{x}_s, \mathbf{a} >< \mathbf{u}, \mathbf{a} > - < \mathbf{u}, \mathbf{a} >^2 \right) \, d\mathbf{u} \\
&= \rho \left\{ \int_D \left(< \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s > - < \mathbf{x}_s, \mathbf{a} >^2 \right) \, d\mathbf{u} \right. \\
&\qquad + \int_D \left(< \mathbf{u}, \mathbf{u} > - < \mathbf{u}, \mathbf{a} >^2 \right) \, d\mathbf{u} \\
&\qquad \left. + \int_D 2 < \mathbf{x}_s - < \mathbf{x}_s, \mathbf{a} > \mathbf{a}, \mathbf{u} > \, d\mathbf{u} \right\} \\
&= md^2 + \Theta_S \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Beispiel. Berechnen das Integral

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

durch Berechnung eines Flächenintegrals wie folgt. Es gilt

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \lim_{R\to\infty}\left(\left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^R e^{-y^2}\,dy\right)\right) = \lim_{R\to\infty} I_R$$

für

$$I_R = \int_{[0,R]\times[0,R]} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y).$$

Bezeichnet K_ρ den Viertelkreis im 1. Quadrant mit Radius ρ, so gilt

$$\int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) \le I_R \le \int_{K_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y).$$

Fortsetzung des Beispiels.

Die Integrale über K_ρ berechnet man nun über Polarkoordinaten:

$$\int_{K_\rho} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) = \int_0^\rho \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r\,d\varphi\,dr = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-\rho^2}\right)$$

und somit gelten die Abschätzungen

$$\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-R^2}\right) \leq I_R \leq \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2R^2}\right)$$

und hiermit gilt schließlich

$$\lim_{R\to\infty} I_R = \frac{\pi}{4},$$

d.h.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$\square$