19 Integralrechnung mehrerer Variabler

19.1 Bereichsintegrale

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$.

Ziel: Berechnung des Volumens unterhalb des Graphen von $f(\mathbf{x})$:

$$V = \int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

Erinnerung Analysis II: Bestimmtes Riemann-Integral einer Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Das Integral I war als Grenzwert von Riemannscher Ober- und Untersumme definiert, falls diese Grenzwerte jeweils existierten und übereinstimmten. $\square$

Konstruktionsprinzip für Bereichsintegrale.

Vorgehensweise: Analog dem eindimensionalen Fall.

Aber: der Definitionsbereich D ist komplizierter.

Startpunkt: Betrachten zunächst den Fall zweier Variabler, $n = 2$, und einen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der Form

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2,$$

d.h. D ist ein kompakter Quader (Rechteck).

Weiterhin sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Definition: *Man nennt* $Z = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n), (y_0, y_1, \ldots, y_m)\}$ *eine* `Zerlegung` *des Quaders* $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, *falls gilt*

$$\begin{array}{rcccl} a_1 & = & x_0 < x_1 < \ldots < x_n & = & b_1 \\ a_2 & = & y_0 < y_1 < \ldots < y_m & = & b_2 \end{array}$$

Mit $\mathbf{Z}(D)$ *wird die* `Menge der Zerlegungen` *von* D *bezeichnet.* □

Zerlegungen und Riemannsche Summen.

Definition:

- Die Feinheit einer Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}(D)$ ist gegeben durch

$$\|Z\| := \max_{i,j}\{|x_{i+1} - x_i|, |y_{j+1} - y_j|\}$$

- Für eine vorgegebene Zerlegung Z nennt man die Mengen

$$Q_{ij} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

die Teilquader der Zerlegung Z. Das Volumen des Teilquaders Q_{ij} ist

$$\mathrm{vol}(Q_{ij}) := (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$$

- Für beliebige Punkte $x_{ij} \in Q_{ij}$ der jeweiligen Teilquader nennt man

$$R_f(Z) := \sum_{i,j} f(\mathbf{x}_{ij}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z. $\square$

Riemannsche Ober- und Untersummen.

Definition: *Analog zum Integral einer Variablen heißen für eine Zerlegung Z*

$$U_f(Z) := \sum_{i,j} \inf_{\mathbf{x} \in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

$$O_f(Z) := \sum_{i,j} \sup_{\mathbf{x} \in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{vol}(Q_{ij})$$

die Riemannnsche Untersumme *bzw.* Riemannsche Obersumme *von* $f(\mathbf{x})$. □

Bemerkung: Eine Riemannsche Summe zur Zerlegung Z liegt stets zwischen der Unter- und Obersumme dieser Zerlegung, d.h. es gilt

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

□

Bemerkung.

Ensteht eine Zerlegung Z_2 aus der Zerlegung Z_1 durch Hinzunahme weiterer Zwischenpunkte x_i und/oder y_j, so gilt

$$U_f(Z_2) \geq U_f(Z_1) \qquad \text{und} \qquad O_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

Frage: Was passiert mit den Unter- und Obersummen im Grenzwert $\|Z\| \to 0$:

$$\begin{aligned} U_f &:= \sup\{U_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}(D)\} \\ O_f &:= \inf\{O_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}(D)\} \end{aligned}$$

Beobachtung: Die beiden Werte U_f und O_f existieren, da Unter- und Obersumme monoton und beschränkt sind. $\square$

Riemannsche Ober- und Unterintegrale.

Definition:

- Riemannsches Unterintegral bzw. Riemannsches Oberintegral der Funktion $f(\mathbf{x})$ über D ist gegeben durch

$$\int_{\underline{D}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad := \quad \sup\{U_f(Z) \,|\, Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$
$$\int_{\overline{D}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad := \quad \inf\{O_f(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}(D)\}$$

- Die Funktion $f(\mathbf{x})$ nennt man Riemann-integrierbar über D, falls Unter- und Oberintegral übereinstimmen. Das Riemann-Integral von $f(\mathbf{x})$ über D ist dann gegeben durch

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \int_{\underline{D}} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\overline{D}} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

$\square$

Bemerkung.

Wir haben bis jetzt “nur” den Fall von **zwei** Variablen betrachtet:

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad D \subset \mathbb{R}^2.$$

In höheren Dimensionen, $n > 2$, ist die Vorgehensweise analog.

Schreibweise: für $n = 2$ und $n = 3$

$$\int_D f(x,y)\,dxdy \qquad \text{bzw.} \qquad \int_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

oder auch

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{bzw.} \qquad \int\int\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

□

Elementare Eigenschaften des Integrals.

Satz:

- Linearität

$$\int_D (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \alpha \int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \beta \int_D g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

- Monotonie

  Gilt $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in D$, so folgt

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq \int_D g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

- Positivität

  Gilt für alle $\mathbf{x} \in D$ die Beziehung $f(\mathbf{x}) \geq 0$, d.h. $f(\mathbf{x})$ ist nichtnegativ, so folgt

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geq 0$$

□

Weitere Eigenschaften des Integrals.

Satz:

- Sind D_1, D_2 und D Quader, $D = D_1 \cup D_2$ und $\operatorname{vol}(D_1 \cap D_2) = 0$, so ist $f(\mathbf{x})$ genau dann über D integrierbar, falls $f(\mathbf{x})$ über D_1 und über D_2 integrierbar ist, und es gilt

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{D_1} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{D_2} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

- Für das Integral gilt die Abschätzung

$$\left| \int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| \leq \sup_{\mathbf{x} \in D} |f(\mathbf{x})| \cdot \operatorname{vol}(D)$$

- Riemannsches Kriterium

  $f(\mathbf{x})$ ist genau dann über D integrierbar, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, Z \in \mathbf{Z}(D) \quad : \quad O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon.$$

$\square$

Der Satz von Fubini.

Satz (Satz von Fubini)**:** *Ist* $f : D \to \mathbb{R}$ *integrierbar,* $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ *ein Quader, und existieren die Integrale*

$$F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy \qquad \textit{und} \qquad G(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx$$

für alle $x \in [a_1, b_1]$ *bzw. für alle* $y \in [a_2, b_2]$*, so gelten*

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy\, dx$$

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx\, dy$$

Bedeutung:

Der Satz von Fubini ermöglicht Reduktion auf eindimensionale Integration. □

Beweis des Satzes von Fubini: Sei $Z = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n), (y_0, y_1, \ldots, y_m)\}$ eine beliebige Zerlegung von D, so gelten für beliebige $y \in [y_j, y_{j+1}]$ und $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ die Abschätzungen

$$\inf_{\mathbf{x}\in Q_{ij}} f(\mathbf{x}) \leq f(\xi_i, y) \leq \sup_{\mathbf{x}\in Q_{ij}} f(\mathbf{x}),$$

und somit (per Integration über $[y_j, y_{j+1}]$)

$$\inf_{\mathbf{x}\in Q_{ij}} f(\mathbf{x})(y_{j+1} - y_j) \leq \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\,dy \leq \sup_{\mathbf{x}\in Q_{ij}} f(\mathbf{x})(y_{j+1} - y_j).$$

Durch Multiplikation mit $(x_{i+1} - x_i)$ und anschließender Summation folgt

$$U_f(Z) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(\xi_i, y)\,dy \right) (x_{i+1} - x_i) \leq O_f(Z).$$

Mit dieser Riemannschen Summe von $F(x)$ zu $Z_x = \{x_0, \ldots, x_n\}$ bekommt man

$$U_f(Z) \leq U_F(Z_x) \leq O_F(Z_x) \leq O_f(Z).$$

Für $\|Z\| \to 0$ folgt die erste Behauptung, die zweite zeigt man analog. ■

Beispiel.

Gegeben sei der Quader $D = [0,1] \times [0,2]$ sowie die Funktion

$$f(x,y) = 2 - xy$$

Stetige Funktionen sind – wie wir gleich zeigen werden – über Quadern integrierbar. Daher können wir den Satz von Fubini anwenden:

$$\begin{aligned}
\int_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int_0^2 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left[2x - \frac{x^2 y}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^2 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy = \left[2y - \frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{y=2} = 3
\end{aligned}$$

Bemerkung: Der Satz von Fubini verlangt als Voraussetzung die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$. Die Existenz der beiden Integrale $F(x)$ und $G(y)$ alleine garantiert die Integrierbarkeit von $f(\mathbf{x})$ **nicht**! □

Die charakteristische Funktion.

Definition: *Für* $D \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt und* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *beschränkt setzen wir*

$$f^*(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & : \quad \textit{falls } \mathbf{x} \in D \\ 0 & : \quad \textit{falls } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases}$$

Speziell für $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ *heißt* $f^*(\mathbf{x})$ *die* charakteristische Funktion *von* D.
Die charakteristische Funktion von D *wird mit* $\chi_D(\mathbf{x})$ *bezeichnet.*

Sei nun Q *der kleinste Quader mit* $D \subset Q$. *Dann heißt die Funktion* $f(\mathbf{x})$ integrierbar *über* D, *falls* $f^*(\mathbf{x})$ *über* Q *integrierbar ist, und wir setzen*

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} := \int_Q f^*(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

$\square$

Messbarkeit und Nullmengen.

Definition: *Die kompakte Menge* $D \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* messbar, *falls das Integral*

$$\mathrm{vol}(D) := \int_D 1\,d\mathbf{x} = \int_Q \chi_D(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

existiert. Man nennt dann $\mathrm{vol}(D)$ *das* Volumen *von* D *im* $\mathbb{R}^n$.

Die kompakte Menge D *heißt* Nullmenge, *falls* D *messbar ist mit* $\mathrm{vol}(D) = 0$. $\square$

Bemerkungen:

- Ist die Menge D selbst ein Quader, so folgt $Q = D$, und somit gilt

$$\int_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_Q f^*(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_Q f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

  d.h. die eingeführten Integrationsbegriffe stimmen überein.

- Quader sind messbare Mengen.

- $\mathrm{vol}(D)$ ist in diesem Fall das *tatsächliche* Volumen des Quaders D im $\mathbb{R}^n$. $\square$

Drei wichtige Eigenschaften der Integration.

Satz: *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt. Dann ist* D *genau dann messbar, falls der Rand* ∂D *von* D *eine Nullmenge ist.* $\square$

Satz: *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt und messbar und sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist* $f(\mathbf{x})$ *integrierbar über* D. $\square$

Satz (Mittelwertsatz): *Ist* $D \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt, zusammenhängend und messbar, und ist* $f : D \to \mathbb{R}$ *stetig, so gibt es einen Punkt* $\xi \in D$ *mit*

$$\int_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = f(\xi) \cdot \mathrm{vol}(D).$$

$\square$

Normalbereiche.

Definition:

- Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt ein Normalbereich, falls es stetige Funktionen g, h bzw. $\bar{g}, \bar{h}$ gibt mit

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \ \text{ und } \ g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

bzw.

$$D = \{(x, y) \mid \bar{a} \leq y \leq \bar{b} \ \text{ und } \ \bar{g}(y) \leq x \leq \bar{h}(y)\}$$

- Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^3$ heißt Normalbereich, falls es eine Darstellung

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \mid a \leq x_i \leq b \ ; \ g(x_i) \leq x_j \leq h(x_i) \ ; \ \varphi(x_i, x_j) \leq x_k \leq \psi(x_i, x_j)\}$$

gibt mit einer Permutation (i, j, k) von $(1, 2, 3)$ und stetigen Funktionen g, h, φ und ψ. $\square$

Projizierbare Mengen.

Definition: *Eine Teilmenge* $D \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* projizierbar *in Richtung* x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, *falls es eine messbare Menge* $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *und stetige Funktionen* φ, ψ *gibt, so dass*

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)^T \in B \text{ und } \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) \leq x_i \leq \psi(\tilde{\mathbf{x}})\}.$$

□

Bemerkung:

- Projizierbare Mengen sind stets messbar. Damit sind auch alle Normalbereiche messbar, denn Normalbereiche sind projizierbar.
- Häufig lässt sich der Integrationsbereich D als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche darstellen. Solche Bereich sind ebenfalls messbar. □

Beobachtung.

Satz: *Ist* $f(\mathbf{x})$ *stetig auf einem Normalbereich*

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \textit{ und } g(x) \le y \le h(x)\},$$

so gilt

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy dx.$$

Beweis: Sei $Q = [a, b] \times [c, d]$ das kleinste Rechteck mit $D \subset Q$, also

$$c = \inf_{x \in [a,b]} g(x) \qquad \text{und} \qquad d = \sup_{x \in [a,b]} h(x)$$

und somit

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_Q f^*(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_a^b \int_c^d f^*(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

$\blacksquare$

Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen.

Bemerkung: Analoge Beziehungen gelten für höhere Dimensionen:
Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine projizierbare Menge in Richtung x_i, d.h. D besitzt eine Darstellung der Form

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)^T \in B \text{ und } \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) \leq x_i \leq \psi(\tilde{\mathbf{x}})\},$$

so gilt

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_B \left(\int_{\varphi(\tilde{\mathbf{x}})}^{\psi(\tilde{\mathbf{x}})} f(\mathbf{x})\, dx_i \right) d\tilde{\mathbf{x}}.$$

$\square$

Beispiel.

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := x + 2y$$

Berechne das Integral über der durch zwei Parabeln begrenzten Fläche

$$D := \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1 \text{ und } x^2 \le y \le 2 - x^2\}.$$

Die Menge D ist ein Normalbereich und $f(x,y)$ ist stetig, somit

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)\, d\mathbf{x} &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{2-x^2} (x+2y)\, dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2 \right]_{x^2}^{2-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x(2-x^2) + (2-x^2)^2 - x^3 - x^4)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-2x^3 - 4x^2 + 2x + 4)\, dx = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel.

Zu berechnen sei das Volumen des Rotationsparaboloids

$$V := \{(x,y,z)^T \mid x^2+y^2 \le 1 \text{ und } x^2+y^2 \le z \le 1\}.$$

Darstellung von V als **Normalbereich:**

$$V = \{(x,y,z)^T \mid -1 \le x \le 1 \;;\; -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \;;\; x^2+y^2 \le z \le 1\}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(V) &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{1} dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left[(1-x^2)y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{3/2}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\left[x\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 + \frac{3}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{2}\arcsin(x)\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

□

Wichtige Schlussbemerkung.

Ich wünsche Ihnen

FROHE WEIHNACHTEN

und ein

ERFOLGREICHES NEUES JAHR

$$11111011000_2$$

■