Implizite Darstellung von Flächen.

Das große rote Betzenherz.

$$g(x, y, z) := 10(2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - x^2 z^3 - 10y^2 z^3 = 0$$

Siehe Homepage Fachbereich Mathematik, TU Kaiserslautern:

`http://www.mathematik.uni-kl.de`

Zur impliziten Darstellung von Flächen.

- Die Lösungsmenge einer skalaren Gleichung $g(x, y, z) = 0$ ist für $\text{grad}(g) \neq \mathbf{0}$ *lokal* eine Fläche im $\mathbb{R}^3$.

- Für die Tangentialebene in $\mathbf{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)^T$ mit $g(\mathbf{x}^0) = 0$ und $\text{grad}(g)(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$ bekommen wir für $\Delta\mathbf{x}^0 := \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ mit Taylor-Entwicklung

$$\text{grad}(g) \cdot \Delta\mathbf{x}^0 = g_x(\mathbf{x}^0)(x - x^0) + g_y(\mathbf{x}^0)(y - y^0) + g_z(\mathbf{x}^0)(z - z_0) = 0$$

d.h. der Gradient steht senkrecht auf der Fläche $g(x, y, z) = 0$.

- Ist zum Beispiel $g_z(\mathbf{x}^0) \neq 0$, so gibt es lokal um $\mathbf{x}^0$ eine Darstellung der Form

$$z = f(x, y)$$

und für die **partiellen Ableitungen** von $f(x, y)$ bekommt man

$$\text{grad}(f)(x, y) = (f_x, f_y) = -\frac{1}{g_z}(g_x, g_y) = \left(-\frac{g_x}{g_z}, -\frac{g_y}{g_z}\right).$$

mit dem Satz über implizite Funktionen.

Das Umkehrproblem

Frage: Lässt sich ein vorgegebenes Gleichungssystem

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{f} : \mathrm{D} \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$ offen, nach $\mathbf{x}$ auflösen, also **invertieren**?

Satz (Umkehrsatz)**:** *Sei* $\mathbf{f} : \mathrm{D} \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$ *offen, eine* C^1*-Funktion. Ist für ein* $\mathbf{x}^0 \in \mathrm{D}$ *die Jacobi-Matrix* $\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ *regulär, so gibt es Umgebungen* U *und* V *von* $\mathbf{x}^0$ *und* $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$*, so dass* $\mathbf{f}$ *den Bereich* U ***bijektiv*** *auf* V *abbildet.*

Die Umkehrfunktion $\mathbf{f}^{-1} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ *ist ebenfalls eine* C^1*-Funktion, und es gilt für alle* $\mathbf{x} \in \mathrm{U}$

$$\mathbf{J}\,\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = (\mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))^{-1}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Beweis: Wende auf $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ den Satz über implizite Funktionen an. □

Bemerkung: Man nennt dann $\mathbf{f}$ lokal einen C^1-Diffeomorphismus. □

18.3 Extremalprobleme unter Gleichungsnebenbedingungen

Frage: Welche Abmessungen sollte eine Metalldose haben, damit bei vorgegebenem Volumen der Materialverbrauch am geringsten ist?

Lösungsansatz: Sei $r > 0$ der Radius und $h > 0$ die Höhe der Dose. Dann gilt

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ O &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \end{aligned}$$

Setze bei vorgebenem Volumen $c \in \mathbb{R}_+$, und mit $x := r, y := h$,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2\pi x^2 + 2\pi x y \\ g(x,y) &= \pi x^2 y - c = 0 \end{aligned}$$

Bestimme das Minimum der Funktion $f(x,y)$ auf der Menge

$$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid g(x,y) = 0\}.$$

Lösung des restringierten Minimierungsproblems.

Aus $g(x,y) = \pi x^2 y - c = 0$ folgt

$$y = \frac{c}{\pi x^2}$$

Einsetzen in $f(x,y)$ ergibt

$$h(x) := 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{c}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2c}{x}$$

Bestimme nun das Minimum der Funktion $h(x)$:

$$h'(x) = 4\pi x - \frac{2c}{x^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4\pi x = \frac{2c}{x^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \left(\frac{c}{2\pi}\right)^{1/3}$$

Hinreichende Bedingung

$$h''(x) = 4\pi + \frac{4c}{x^3} \qquad \Longrightarrow \qquad h''\left(\left(\frac{c}{2\pi}\right)^{1/3}\right) = 12\pi > 0.$$

$\square$

Allgemeine Formulierung des Problems.

Bestimme die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0,$$

wobei $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Die Nebenbedingungen lauten also

$$\begin{array}{rcl} g_1(x_1, \ldots, x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) & = & 0 \end{array}$$

Alternativ: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(\mathbf{x})$ auf der Menge

$$G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Die Lagrange-Funktion und das Lagrange-Lemma.

Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$F(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \qquad \text{für } \mathbf{x} \in D$$

und suchen die Extremwerte von $F(\mathbf{x})$ für *festes* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T$.

Die Zahlen λ_i, $i = 1, \ldots, m$ nennt man Lagrange-Multiplikatoren.

Satz: (Lagrange-Lemma)**:** *Minimiert (bzw. maximiert)* $\mathbf{x}^0 \in D$ *die Lagrange-Funktion* $F(\mathbf{x})$ *(für ein festes* λ*) über* D *und gilt* $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = 0$*, so liefert* $\mathbf{x}^0$ *das Minimum (bzw. Maximum) von* $f(\mathbf{x})$ *über* $G := \{\mathbf{x} \in D \,|\, \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$.

Beweis: Für ein beliebiges $\mathbf{x} \in D$ gilt nach Voraussetzung

$$F(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$$

Wählt man speziell $\mathbf{x} \in G$, so ist $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, also auch $f(\mathbf{x}^0) \leq f(\mathbf{x})$. ■

Eine notwendige Bedingung für lokale Extrema.

Sind f und g_i, $i = 1, \ldots, m$, C^1-Funktionen, so ist eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle $\mathbf{x}^0$ von $F(\mathbf{x})$ gegeben durch

$$\mathrm{grad}(F)(\mathbf{x}) = \mathrm{grad}(f)(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{grad}(g_i)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Zusammen mit den Nebenbedingungen $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ ergibt sich ein (nichtlineares) Gleichungssystem mit $(n+m)$ Gleichungen und $(n+m)$ Unbekannten $\mathbf{x}$ und λ.

Die Lösungen $(\mathbf{x}^0, \lambda^0)$ sind geeignete Kandidaten für die gesuchten Extremstellen, denn diese erfüllen die o.g. notwendige Bedingung.

Alternativ: Definiere eine Lagrange-Funktion

$$G(\mathbf{x}, \lambda) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

und suche die Extremstellen von $G(\mathbf{x}, \lambda)$ bezüglich $\mathbf{x}$ **und** λ.

Bemerkung.

Man kann auch eine **hinreichende** Bedingung aufstellen:

Sind die Funktionen f und $\mathbf{g}$ C^2-Funktionen und ist die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)$ der Lagrange-Funktion positiv (bzw. negativ) definit, so ist $\mathbf{x}^0$ tatsächlich ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum) von $f(\mathbf{x})$ auf G.

In den meisten Anwendungen ist die hinreichende Bedingung allerdings **nicht** erfüllt, obwohl $\mathbf{x}^0$ ein strenges lokales Extremum ist.

Insbesondere kann man aus der Indefinitheit der Hesse-Matrix $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)$ **nicht** schließen, dass $\mathbf{x}^0$ kein Extremwert ist.

Ähnlich problematisch ist die hinreichende Bedingung, die man aus der Hesse-Matrix für die Lagrange-Funktion $G(\mathbf{x}, \lambda)$ bezüglich **x und** λ erhält.

Beispiel.

Gesucht seien die Extrema von $f(x, y) := xy$ auf der Kreisscheibe

$$K := \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Da die Funktion f stetig und $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, folgt die Existenz von globalen Maxima und Minima von f auf K.

Wir betrachten zunächst das Innere K^0 von K, also die *offene* Menge

$$K^0 := \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Die notwendige Bedingung für einen Extremwert lautet nun

$$\mathrm{grad}(f) = (y, x) = \mathbf{0}.$$

Somit ist der Ursprung $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ Kandidaten für ein (lokales) Extremum.

Fortsetzung des Beispiels.

Die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f$ im Ursprung, gegeben durch

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist **indefinit**. Daher ist $\mathbf{x}^0$ ein **Sattelpunkt**.

Die Extrema der Funktion müssen also auf dem Rand liegen, der eine **Gleichungsnebenbedingung** darstellt:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Wir suchen also die Extremwerte von $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$. Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet

$$F(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Komplettierung des Beispiels.

Damit ergibt sich das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y + 2\lambda x &= 0 \\ x + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

mit den vier Lösungen

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \quad : \quad \mathbf{x}^{(1)} = (\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2})^T \quad \mathbf{x}^{(2)} = (-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})^T$$

$$\lambda = -\tfrac{1}{2} \quad : \quad \mathbf{x}^{(3)} = (\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})^T \quad \mathbf{x}^{(4)} = (-\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2})^T$$

Minima und Maxima lassen sich nun einfach aus den Funktionswerten ablesen:

$$f(\mathbf{x}^{(1)}) = f(\mathbf{x}^{(2)}) = -1/2 \qquad f(\mathbf{x}^{(3)}) = f(\mathbf{x}^{(4)}) = 1/2$$

d.h. Minima sind $\mathbf{x}^{(1)}$ und $\mathbf{x}^{(2)}$, Maxima sind $\mathbf{x}^{(3)}$ und $\mathbf{x}^{(4)}$. □

Die Lagrange-Multiplikatoren-Regel.

Satz: *Seien* $f, g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$ *jeweils* C^1*-Funktionen, und sei* $\mathbf{x}^0 \in D$ *ein lokales Extremum von* $f(\mathbf{x})$ *unter der Nebenbedingung* $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$*. Weiterhin gelte die* Regularitätsbedingung

$$\operatorname{rang}\left(\mathbf{J}\,\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)\right) = m.$$

Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$*, so dass für die* Lagrange-Funktion

$$F(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$$

die folgende **notwendige Bedingung erster Ordnung** *gilt:*

$$\operatorname{grad}(F)(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}.$$

Notwendige Bedingung zweiter Ordnung.

Satz: *Ist* $\mathbf{x}^0 \in D$ *ein lokales Minimum von* $f(\mathbf{x})$ *unter der Nebenbedingung* $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$, *ist die Regularitätsbedingung erfüllt und sind* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *zugehörige Lagrange-Multiplikatoren, so ist die Hesse-Matrix* $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)$ *der Lagrange-Funktion positiv semidefinit auf dem Tangentialraum*

$$\mathbf{T}G(\mathbf{x}^0) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{grad}(g_i)(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m\}$$

d.h., es gilt

$$\mathbf{y}^T \, \mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)\, \mathbf{y} \geq 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{y} \in \mathbf{T}G(\mathbf{x}^0).$$

$\square$

Hinreichende Bedingung.

Satz: *Ist für einen Punkt* $\mathbf{x}^0 \in G$ *die Regularitätsbedingung erfüllt, existieren Lagrange-Multiplikatoren* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$*, so dass* $\mathbf{x}^0$ *ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange-Funktion ist, und ist die Hesse-Matrix* $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)$ *positiv definit auf dem Tangentialraum*

$$\mathbf{T}G(\mathbf{x}^0) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{grad}(g_i)(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m\}$$

d.h., es gilt

$$\mathbf{y}^T \mathbf{H}_F(\mathbf{x}^0)\, \mathbf{y} > 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{y} \in \mathbf{T}G(\mathbf{x}^0) \setminus \{0\},$$

so ist $\mathbf{x}^0$ *ein strenges lokales Minimum von* $f(\mathbf{x})$ *unter der Nebenbedingung* $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. □

Beispiel.

Man bestimme das globale Maximum der Funktion

$$f(x,y) = -x^2 + 8x - y^2 + 9$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$F(x) = -x^2 + 8x - y^2 + 9 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Aus der notwendigen Bedingung ergibt sich das nichtlineare System

$$\begin{aligned} -2x + 8 &= -2\lambda x \\ -2y &= -2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Aus der notwendigen Bedingung ergibt sich das nichtlineare System

$$\begin{aligned} -2x + 8 &= -2\lambda x \\ -2y &= -2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq 1$. Verwendet man dies in der zweiten Gleichung, so gilt $y = 0$. Aus der dritten Gleichung erkennt man sofort $x = \pm 1$.

Demnach sind nur die beiden Punkte $(x, y) = (1, 0)$ und $(x, y) = (-1, 0)$ Kandidaten für das globale Maximum. Wegen

$$f(1, 0) = 16 \qquad \text{und} \qquad f(-1, 0) = 0$$

wird das globale Maximum von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ im Punkt $(x, y) = (1, 0)$ angenommen. $\square$

Noch ein Beispiel.

Bestimme die lokalen Extremwerte der Funktion

$$f(x, y, z) = 2x + 3y + 2z$$

auf dem Schnitt des Zylinders

$$Z := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = 2\}$$

mit der Ebene

$$E := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \, : \, x + z = 1\}$$

Umformulierung: Bestimme die Extremwerte der Funktion $f(x, y, z)$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &:= x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ g_2(x, y, z) &:= x + z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{Jg}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hat den maximalen Rang 2, d.h. wir können über die Lagrange-Funktion Extremwerte bestimmen:

$$F(x, y, z) = 2x + 3y + 2z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$$

Die notwendige Bedingung ergibt das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 &= 0 \\ 3 + 2\lambda_1 y &= 0 \\ 2 + \lambda_2 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 2 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$$

Weitere Fortsetzung des Beispiels.

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 &= 0 \\ 3 + 2\lambda_1 y &= 0 \\ 2 + \lambda_2 &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 2 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt

$$2\lambda_1 x = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\lambda_1 \neq 0$, also $x = 0$.

Damit ergeben sich die möglichen Extremwerte als

$$(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1) \qquad \text{und} \qquad (x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1).$$

Komplettierung des Beispiels.

Die möglichen Extremwerte sind also

$$(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1) \qquad \text{und} \qquad (x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1).$$

Man berechnet nun die zugehörigen Funktionswerte

$$\begin{aligned} f(0, \sqrt{2}, 1) &= 3\sqrt{2} + 2 \\ f(0, -\sqrt{2}, 1) &= -3\sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$

Daher liegt im Punkt $(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1)$ ein Maximum, im Punkt $(x, y, z) = (0, -\sqrt{2}, 1)$ ein Minimum. $\square$