Das vollständige Differential.

Bemerkung: Für eine differenzierbare Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{Jf}(\mathbf{x})\cdot\Delta\mathbf{x} + \mathbf{o}(\|\Delta\mathbf{x}\|)\\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_k}\Delta x_k + \mathbf{o}(\|\Delta\mathbf{x}\|)\end{aligned}$$

somit

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_k}\Delta x_k$$

in *erster Näherung* für die Änderung um $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Definition: *Sei* $\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen, und* $\mathbf{x}^0 \in D$. *Dann notieren wir*

$$\mathbf{df}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0)dx_1 + \ldots + \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0)dx_n,$$

wobei $dx_1,\ldots,dx_n$ *die* Differentiale *der Koordinaten* $x_1,\ldots,x_n$ *heißen, und* $\mathbf{df}(\mathbf{x}^0)$ *das* vollständige Differential *von* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *in* $\mathbf{x}^0$. □

Vollständiges Differential und Funktionalmatrix.

Beobachtung: Mit der Darstellung

$$\mathbf{df}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(\mathbf{x}^0)dx_1 + \ldots + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}(\mathbf{x}^0)dx_n,$$

und $dx_k(\mathbf{x}) = x_k - x_k^0$, $1 \leq k \leq n$, ergibt sich ein wichtiger Zusammenhang zwischen dem totalen Differential $\mathbf{df}(\mathbf{x}^0)$ und der Funtionalmatrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)$ mit

$$\mathbf{df}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k}(\mathbf{x}^0)(x_k - x_k^0) = \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0),$$

d.h.

$$\mathbf{df}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0).$$

□

Differentiationsregeln.

Satz:

- **Linearität:** *Sind* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$ *differenzierbar in* $\mathbf{x}^0 \in D$, D *offen, so ist auch* $\alpha\, \mathbf{f} + \beta\, \mathbf{g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *differenzierbar in* $\mathbf{x}^0$ *und es gilt*

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g})(\mathbf{x}^0) &= \alpha\, \mathbf{df}(\mathbf{x}^0) + \beta\, \mathbf{dg}(\mathbf{x}^0) \\ \mathbf{J}(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g})(\mathbf{x}^0) &= \alpha\, \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0) + \beta\, \mathbf{Jg}(\mathbf{x}^0) \end{aligned}$$

- **Kettenregel:** *Ist* $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ *differenzierbar in* $\mathbf{x}^0 \in D$, D *offen, und ist* $\mathbf{g} : E \to \mathbb{R}^k$ *differenzierbar in* $\mathbf{y}^0 = f(\mathbf{x}^0) \in E \subset \mathbb{R}^m$, E *offen, so ist* $g \circ f$ *ebenfalls in* $\mathbf{x}^0$ *differenzierbar.*

  Für die Differentiale gilt

$$\mathbf{d}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}^0) = \mathbf{dg}(\mathbf{y}^0) \circ \mathbf{df}(\mathbf{x}^0)$$

  und analog für die Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{J}(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}^0) = \mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0) \cdot \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)$$

Beweis von (a): Folgt mit der Linearität von $\mathbf{J}$ und der o.g. Beziehung zu $\mathbf{d}$.

Beweis von (b): Für Funktionen $\mathbf{r}_1 = \mathbf{o}(\|\Delta\mathbf{x}\|)$ und $\mathbf{r}_2 = \mathbf{o}(\|\Delta\mathbf{y}\|)$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{r}_1(\mathbf{x}) \\
\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) &= \mathbf{g}(\mathbf{y}^0) + \mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0)(\mathbf{y} - \mathbf{y}^0) + \mathbf{r}_2(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

Aus der ersten Beziehung bekommt man insbesondere

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| \leq \|\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| + \|\mathbf{r}_1(\mathbf{x})\|$$

und somit folgt weiterhin, dass

$$\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} \leq \|\mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0)\| + \frac{\|\mathbf{r}_1(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|}$$

für $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$ beschränkt ist.

Schließlich gilt die Entwicklung

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)) + \mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0) \cdot \mathbf{Jf}(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0) \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{r}_2(\mathbf{y}),$$

für deren Rest

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0) \cdot \mathbf{r}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{r}_2(\mathbf{y})$$

man erhält:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} &= \mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0) \cdot \frac{\mathbf{r}_1(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} + \frac{\mathbf{r}_2(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} \\
&= \mathbf{Jg}(\mathbf{y}^0) \frac{\mathbf{r}_1(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} + \frac{\mathbf{r}_2(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\|} \cdot \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|}
\end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x}^0$ folgt $\mathbf{y} \to \mathbf{y}^0$ für $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$ und somit

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|} = 0.$$

$\blacksquare$

Beispiel zur Kettenregel.

Sei $\mathbf{h} : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, eine in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurve mit Werten in $D \subset \mathbb{R}^n$, D offen, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine in $\mathbf{x}^0 = \mathbf{h}(t_0)$ differenzierbare skalare Funktion.

Dann ist auch die Komposition

$$(f \circ \mathbf{h})(t) = f(h_1(t), \ldots, h_n(t))$$

in t_0 differenzierbar, und für die Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ \mathbf{h})'(t_0) &= \mathbf{J}f(\mathbf{h}(t_0)) \cdot \mathbf{Jh}(t_0) \\ &= \operatorname{grad} f(\mathbf{h}(t_0)) \cdot \mathbf{h}'(t_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{h}(t_0)) \cdot h_k'(t_0) \end{aligned}$$

$\square$