Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2007/08**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 25:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\,(x,y) = (x^2 + y, \sin x)^T$$

und das Gebiet G, das von der Funktion $y = 1 - (x-1)^2$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 26:

Gegeben sei die Fläche

$$K = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9\,,\ x + y \leq z \right\} .$$

a) Man zeichne die Fläche K,

b) parametrisiere K und

c) berechne den Flächeninhalt von K mit Hilfe eines Oberflächenintegrals.

Hinweis: In b) eignen sich Kugelkoordinaten, zu c) $\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$.

Aufgabe 27:

Gegeben seien der Körper

$$K = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1\,,\ x^2+y^2 \le z^2 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\,(x,y,z) = (x^3+yz, y^3+x, z^2)^T\,.$$

a) Man skizziere K und gebe Parametrisierungen für die beiden glatten Flächenstücke D und M an, die K beranden.

b) Man berechne das Volumenintegral $\displaystyle\int_K \operatorname{div}\boldsymbol{f}\; d(x,y,z)$, sowie die einzelnen Flüsse von $\boldsymbol{f}$ durch die Flächenstücke D und M. Man bestätige damit für dieses Beispiel den Gaußschen Integralsatz.

Aufgabe 28:

Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}\,(x,y,z) = (z,x,y)^T$ einer turbulenten Strömung sowie die Fläche

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1 \quad \wedge \quad z = x^2 - y^2 \right\}.$$

a) Man zeichne die Fläche F.

b) Man berechne auf F das Integral über alle Wirbelstärken $\displaystyle\int_F \operatorname{rot}\ \boldsymbol{v}\,(\,\boldsymbol{x}\,)\,do\,.$

c) Man berechne die Zirkulation $\displaystyle\oint_{\partial F} \boldsymbol{v}\,(\,\boldsymbol{x}\,)\,d\,\boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{v}$ längs der Randkurve ∂F von F und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$.

Abgabetermin: 4.2. - 8.2.2008 (zu Beginn der Übung)