Aufgabe 1) Kiani – Analysis III,WS 04/05,Aufg.1

a) Bestimmen Sie ein Potential für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (xy^2 + xz^2 , yx^2 + yz^2 , zy^2 + zx^2).$$

b) Zeigen sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$g(x, y, z) = (-y^2 , xy , -2y)$$

kein Potential besitzt.

c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_c g(x, y, z) d(x, y, z)$$

längs der Kurve

$$c(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad c : [0 , \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3.$$

Lösung

a) Sei ϕ ein Potential für f. Dann gilt

$$\Phi_x = xy^2 + xz^2 , \quad \Phi_y = yx^2 + yz^2 , \quad \Phi_z = zy^2 + zx^2.$$

$$\Phi_x = xy^2 + xz^2 \iff \Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(x^2y^2 + x^2z^2\right) + c(y, z)$$

$$\Phi_y = yx^2 + c_y(y, z) = yx^2 + yz^2 \iff c_y(y, z) = yz^2$$

$$\iff c(y, z) = \frac{1}{2}y^2z^2 + d(z) \implies \Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2\right) + d(z)$$

$$\Phi_z = zx^2 + zy^2 + d_z = zx^2 + zy^2 \implies d_z = 0 \implies d = Konst.$$

Also haben wir mit $\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)$ ein Potential für f gefunden.

b) Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}y} = -2y \quad \neq \quad \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}x} = y$$

es gibt also kein potential zu g.

c)

$$
\begin{aligned}
\int_c g(x,y,z)d(x,y,z) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} < f(c(t)), \dot{c}(t) > dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} < \begin{pmatrix} -4\sin^2(t) \\ 4\sin(t)\cos(t) \\ -4\sin(t) \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} > dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin(t)\left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) - 4\sin(t)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin(t) = -4\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \cdot
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2) Welbers – Analysis III,WS 04/05,Aufg.2 Gegeben sei das Extremalproblem

$$f(x,y) \;=\; x^2 \;+\; y^2 \;=\; \min!$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \;=\; e^{x-1} - \arctan(y+1) - 1 \;= 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_0 \;=\; (1,-1)^T$ ein stationärer Punkt der Lagrange–Funktion F ist und überprüfen Sie die Regularitätsbedingung im Punkt $\boldsymbol{x}_0 \;=\; (1,-1)^T$.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $\boldsymbol{x}_0 \;=\; (1,-1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $HF(\boldsymbol{x}_0)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum $Tg(\boldsymbol{x}_0)$.

Lösung:

Teil a): Es gilt $\nabla g(x,y) = (e^{x-1}, -\frac{1}{1+(1+y)^2})^T$ und somit hat $\nabla g(1,-1) = \binom{1}{-1}$ den Rang 1 (Regularitätsbedingung).

Die Lagrange-Funktion lautet: $F = f + \lambda \cdot g$.

Die notwendige Bedingung 1. Ordnung lautet: $\nabla F(1,-1;\lambda) = \mathbf{0}$. Mit

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 2x + \lambda e^{x-1} \\ 2y - \lambda \frac{1}{1+(1+y)^2} \end{pmatrix} \text{ folgt } \nabla F(1,-1;\lambda) = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ -2-\lambda \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ für } \lambda = -2.$$

Teil b): Es gilt :

$$HF = \begin{pmatrix} 2+\lambda e^{x-1} & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \frac{y+1}{(1+(y+1)^2)^2} \end{pmatrix} \Rightarrow HF(1,-1;-2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

d.h. HF(1,-1;-2) ist semidefinit ($\det HF(1,-1;-2) = 0$).

Mit $\nabla g(1,-1) \cdot \binom{x}{y} = 0 \Rightarrow x - y = 0$ ergibt sich auf dem Tangentialraum:

$$(1,1) HF(1,-1;-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0,2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 > 0.$$

d.h. die Hesse-Matrix $HF(1,-1;-2)$ ist positiv definit auf dem Tangentialraum. Daher liegt im Punkt $(1,-1)$ ein strenges lokales Minimum vor.