Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie ein Potential für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (xy^2 + xz^2 , yx^2 + yz^2 , zy^2 + zx^2).$$

b) Zeigen sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$g(x,y,z) = (-y^2 , xy , -2y)$$

kein Potential besitzt.

c) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_c g(x,y,z) d(x,y,z)$$

längs der Kurve

$$c(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ t \end{pmatrix} \qquad c : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 2
Gegeben sei das Extremalproblem

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = \min!$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = e^{x-1} - \arctan(y+1) - 1 = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^T$ ein stationärer Punkt der Lagrange–Funktion F ist und überprüfen Sie die Regularitätsbedingung im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^T$.

b) Untersuchen Sie den stationären Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,-1)^T$ auf seinen Typ hin. Stellen Sie dazu die Hesse–Matrix $HF(\boldsymbol{x}_0)$ auf und überprüfen Sie deren Definitheit auf dem Tangentialraum $Tg(\boldsymbol{x}_0)$.