Analysis III, SS05, 12.10.2005, (Oberle)

Aufgabe 1:

a) Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ der von der Kurve

$$\mathbf{c} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{c}(t) = \left(1 - t^2, t(1 - t^2)\right)^{\mathrm{T}},$$

berandete, kompakte, bzgl. beider Koordinaten projizierbare Bereich.
Berechnen Sie $\int_K \operatorname{rot} \mathbf{f}(x, y)\, \mathrm{d}(x, y)$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{f}(x, y) = (y,\, 1 - x)^{\mathrm{T}}$$

b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers $K \subset \mathbb{R}^3$,

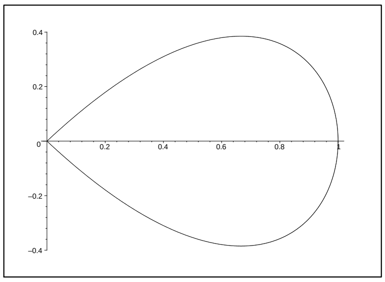
$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, |x| \le 1,\ \ -(1 - x^2) \le y \le 1 - x^2,\ \ 0 \le z \le \left(1 - x^2 - y\right),\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M \right\}.$$

Lösung zu Aufgabe 1)

a) Die Kurve $\mathbf{c} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{c}(t) = \left(1 - t^2, t(1 - t^2)\right)^{\mathrm{T}},$$

parametrisiert den Rand von K in mathematisch positiver Umlaufrichtung. Die Menge K ist offensichtlich projizierbar und der Integralsatz von Green kann angewendet werden. Es gilt



$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \left(-2t,\, 1 - 3t^2\right)^T$$

und

$$\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) = \left(t(1 - t^2),\, 1 - (1 - t^2)\right)^T = \left(t - t^3,\, t^2\right)^T.$$

Man erhält also

$$\begin{aligned}\int_K \operatorname{rot}\mathbf{f}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\\ &= \int_{-1}^{1} \langle \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)), \dot{\mathbf{c}}(t)\rangle\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-1}^{1} -2t(t-t^3)+t^2(1-3t^2)\,\mathrm{d}t \;=\; -\int_{-1}^{1} t^2+t^4\,\mathrm{d}t\\ &= -\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} = -\frac{16}{15}.\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg: Mit $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)^{\mathrm{T}}$ sieht man, dass $\mathbf{c}_1\big([-1,1]\big) = [0,1]$ ist. Setzt man $x = \mathbf{c}_1(t)$ so erhält man $t^2 = 1-x$. Dies bedeutet

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} \,\middle|\, 0 \le x \le 1,\ -x\sqrt{1-x} \le y \le x\sqrt{1-x} \right\}.$$

Es gilt weiterhin mit $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)^{\mathrm{T}}$

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}(x,y) = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y}(x,y) = -2.$$

Schließlich ergibt sich mittels des Satzes von Fubini und partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_K \operatorname{rot}\mathbf{f}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^1 \int_{-x\sqrt{1-x}}^{x\sqrt{1-x}} -2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 -4x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -4\left[x\cdot\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}\right]_0^1 + 4\int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{8}{3}\left[\frac{(1-x)^{\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}}\right]_0^1 = -\frac{16}{15}.\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
V &= \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-1}^{1} \int_{-(1-x^2)}^{1-x^2} \int_0^{1-x^2-y} \,\mathrm{d}z \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-(1-x^2)}^{1-x^2} (1-x^2-y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} 2(1-x^2)^2 - \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-(1-x^2)}^{1-x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} \\
&= 4\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{32}{15}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2:

a) Stellen Sie das Taylorpolynom $T_2(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}^0)$ zweiten Grades für die Funktion

$$f(x,y) = \sin(x+y) \;+\; ye^{x-y}$$

zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0,0)^T$ auf und geben Sie eine Abschätzung für das Restglied $|R_2(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}^0)|$ im Bereich $|x| \le 0.1$ und $|y| \le 0,1$ an.

b) (i) Zeigen Sie, dass $(x,y) = (0,0)^T$ ein singulärer Punkt der implizit definierten Kurve

$$\left(x^2 + 4y^2\right)^2 + x^2 - 4y^2 = 0$$

ist und stellen Sie fest, ob dies ein isolierter Punkt, ein Rückkehrpunkt oder ein Doppelpunkt ist.

(ii) Zeigen Sie, dass es keine weiteren singulären Punkte gibt.

Lösung zu Aufgabe 2)

a)

$$\begin{aligned} f_x &= ye^{x-y} + \cos(x+y) & f_x(0,0) &= 1 \\ f_y &= (1-y)e^{x-y} + \cos(x+y) & f_y(0,0) &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= ye^{x-y} - \sin(x+y) & f_{xx}(0,0) &= 0 \\ f_{xy} &= (1-y)e^{x-y} - \sin(x+y) & f_{xy}(0,0) &= 1 \\ f_{yy} &= (y-2)e^{x-y} - \sin(x+y) & f_{yy}(0,0) &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f_{xxx}| &= \left|ye^{x-y} - \cos(x+y)\right| & &\le 0.1e^{0.2} + 1 \\ |f_{xxy}| &= \left|(1-y)e^{x-y} - \cos(x+y)\right| & &\le 1.1e^{0.2} + 1 \\ |f_{xyy}| &= \left|(y-2)e^{x-y} - \cos(x+y)\right| & &\le 2.1e^{0.2} + 1 \\ |f_{yyy}| &= \left|(-y+2+1)e^{x-y} - \cos(x+y)\right| & &\le 3.1e^{0.2} + 1 < 3,1 * 2 + 1 = 7.2 \end{aligned}$$

$$T_2(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}_0) \;=\; x + 2y + xy - y^2$$

$$|R_2(\boldsymbol{x}\,,\,\boldsymbol{x}_0)| \;\le\; \frac{2^3}{3!}.C\|\,\boldsymbol{x} \;-\; \boldsymbol{x}_0\|_\infty^{-3} \;\le\; \frac{8}{6}(7.2)10^{-3} = 9,6.10^{-3} < 0.01.$$

b)

$$\left(x^2+4y^2\right)^2+x^2-4y^2=g(x,y)=0$$

$$g_x(x,y)=2(x^2+4y^2)2x+2x=2x(2x^2+8y^2+1) \Longrightarrow g_x(0,0)=0$$

$$g_y=2(x^2+4y^2)8y-8y=8y(2x^2+8y^2-1) \qquad \Longleftrightarrow g_y(0,0)=0$$

Außerdem gilt $g(0,0)=0$. Also ist $(0,0)^T$ ein singulärer Punkt der Kurve. Es gilt

$$\begin{aligned} g_{xx} &= 12x^2+16y^2+2 \\ g_{xy} &= 32xy \\ g_{yy} &= 16x^2+192y^2-8 \end{aligned}$$

damit erhält man

$$Hg(0,0)=\begin{pmatrix} +2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Es liegt also ein Doppelpunkt vor.

(i) Gesucht sind Punkte mit $g=g_x=g_y=0$.

$$g_x(x,y)=2(x^2+4y^2)2x+2x=2x(2x^2+8y^2+1) \Longleftrightarrow x=0$$

$$g_y=2(x^2+4y^2)8y-8y=8y(2x^2+8y^2-1)$$

$$\Longleftrightarrow y=0 \text{ oder } 2x^2+8y^2=1$$

Setzt man $x=0$ in $2x^2+8y^2=1$ ein, so folgt $y^2=1/8$. Nun gilt aber
$g\left(0,\pm\sqrt{\frac{1}{8}}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\neq 0$.
Die Punkte $\left(0,\pm\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^T$ liegen also nicht auf der Kurve. Der Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist also der einzige stationäre Punkt.