Aufgabe 1

a) Skizzieren Sie das durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |x| + |y| &\leq 2, \\ y &\geq -1 \end{aligned}$$

beschriebene Flächenstück und berechnen Sie den Schwerpunkt bei homogener Dichte $\rho = 1$.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D (1 - x^2) d(x, y)$$

über dem Kreisring

$$D := \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Hinweis: $\cos^2 \phi = \frac{1}{2} (\cos(2\phi) + 1)$.

Lösung von Aufgabe 1

$$\begin{aligned} \text{Masse} &= \int_D \rho \, d(x, y) \\ &= \int_D d(x, y) = \text{Fläche} \\ &= \frac{4 \cdot 2}{2} + 2 \left(\frac{1 \cdot 1}{2} \right) + 2 \cdot 1 \\ &= 4 + 1 + 2 = 7 \end{aligned}$$

$x_s = 0$ (Symmetrie)

Für D_1, D_2 gilt $y_s = 0$ (Symmetrie)

$$\begin{aligned} 7 \cdot y_s &= 2 \int_{-1}^{0} \int_{-1}^{2+x} y \, dy \, dx \\ &= 2 \int_{-1}^{0} \frac{(2 + x)^2}{2} - 1 \\ &= 2 \left[\frac{(2 + x)^3}{6} \right]_{-1}^{0} - 1 \\ &= 2 \left(\frac{8 - 1}{6} \right) - 1 = \frac{8}{6} \\ y_s &= \frac{\frac{4}{3}}{7} = \frac{4}{21}, \qquad \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{21} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_D (1-x^2)d(x,y) &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (1-r^2\cos^2\varphi) r\, d\varphi\, dr \\
&= 2\pi \int_1^2 r\, dr - \int_1^2 r^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\big(\underbrace{\cos(2\varphi)}_{\substack{\text{liefert 0 da } \sin(2\varphi) \\ \pi\text{-periodisch}}} +1\big) d\varphi\, dr \\
&= 3\pi - \pi \int_1^2 r^3\, dr = 3\pi - \pi \cdot \frac{15}{4} = -\frac{3}{4}\pi
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2) [Kiani – Analysis III,WS 02/03,Aufg.2] Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = xy + z^2$$

auf dem Schnitt der Zylinderoberfläche

$$g(x,y,z) \;=\; x^2 + y^2 - 8 \;=\; 0$$

mit der Ebene

$$h(x,y,z) \;=\; x - y + 2z - 1 \;=\; 0.$$

Hinweis: Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

Lsung Kiani – Analysis III,WS 02/03,Aufg.2

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy + z^2 \overset{!}{=} \min/\max \\ g(x,y,z) &= x^2 + y^2 - 8 = 0 \\ h(x,y,z) &= x - y + 2z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Regularitätsbedingung

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

erfüllt $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g(0,0,z) = -8 \neq 0 \Rightarrow$ Punkte mit $x = y = 0$ sind nicht zulässig.
Regul.Bed. in allen zulässigen Punkten erfüllt.

Zu lösen:

$$\begin{aligned} \text{grad}(f + \lambda g + \mu h) &= 0 \\ g = h &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} y + \lambda \cdot 2x + \mu &= 0 \\ x + \lambda \cdot 2y - \mu &= 0 \end{aligned}\right\} \; y + 2\lambda x + x + 2\lambda y = 0$$

$$\begin{aligned} 2z + \lambda \cdot 0 + 2\mu &= 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\mu = -z} \\ x - y + 2z &= 1 \;\Rightarrow\; \boxed{z = \tfrac{1}{2}(1 - x + y)} \\ x^2 + y^2 &= 8 \end{aligned}$$

Neues System

$$\begin{aligned} (1 + 2\lambda)(x + y) &= 0 \;\Rightarrow\; x = -y \;\vee\; \lambda = -\frac{1}{2} \\ 2\lambda x + y - \frac{1}{2}(1 - x + y) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 8 \end{aligned}$$

1. Fall $y = -x:$

$$\begin{aligned} 2\lambda x - x - \frac{1}{2}(1 - x - x) &= 0 \\ x^2 + x^2 &= 8 \Rightarrow x^2 = 4 \quad x = \pm 2 \quad z = \frac{1}{2}(1 - 2x) \end{aligned}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$f(P_1) = -4 + \frac{9}{4} = -\frac{7}{4} \qquad f(P_2) = -4 + \frac{25}{4} = \frac{9}{4}$$

2. Fall $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, Noch zu erfüllen: $\left\{ \begin{aligned} -x + y - \tfrac{1}{2} + \tfrac{x}{2} - \tfrac{y}{2} &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 8 \end{aligned} \right.$

$-x + y = 1 \quad \boxed{y = 1 + x}$

$z = \dfrac{1}{2}(1 - x + y) = 1 \quad \boxed{z = 1}$

$x^2 + y^2 = 2x^2 + 2x + 1 = 8 \;\Rightarrow\; 2x^2 + 2x - 7 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 14}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}, \qquad y = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 + \sqrt{15} \\ 1 + \sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 - \sqrt{15} \\ 1 - \sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(P_3) &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{15} - 1\right)\left(\sqrt{15} + 1\right) + 1 \\ &= \frac{1}{4}(15 - 1) + 1 = \frac{9}{2} \\ f(P_4) &= \frac{1}{4}\left(-\sqrt{15} + 1\right)\left(-\sqrt{15} - 1\right) + 1 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Der Schnitt eines Zylindermantels mit einer (nicht zur Achse paralellen) Ebene ist beschränkt und abgeschlossen $\Rightarrow$ Max/Min werden angenommen.

globale Maxima in P_3 und P_4

globales Minimum in P_1