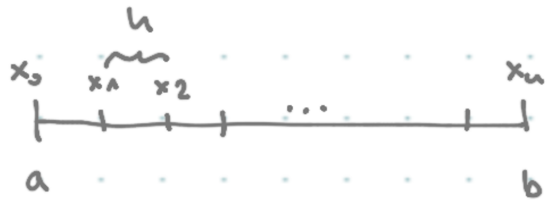
ANALYSIS II

J. Behrens / Woche 12

① Trapezregel für äquidistante Teilung von $[a,b]$

- Sei $x_k = a + kh$
  $k = 0, \dots, n$; $h = \frac{b-a}{n}$



- Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{h}$$

$$= h \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$$

$$= h\left(\tfrac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2} y_n\right)$$

② Lagrange-Polynom - konstruktiver Nachweis:

Idee: Konstruiere ein Polynom n-ten Grades $p_n(x)$, so dass

$$p_n(x_i) = y_i \qquad \text{für } i = 0, \dots, n$$

Wie? Könnten wir $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, y_j$ konstruieren, so dass

$$a_j(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

dann würde gelten $p_n(x_i) = y_i$

Lagrange-Polynome: Die Polynome

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$$= \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot \ldots \cdot (x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdot \ \cdots \ (x-x_n)}{(x_j-x_0)\ (x_j-x_1)\cdot \ \ldots \cdot (x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdot \ \cdot\cdot \ (x_j-x_n)}$$

haben genau die gewünschte Eigenschaft.

3 Gleichungssystem für Newton-Interpolation:

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + b_n(x-x_0)\cdot \ldots \cdot(x-x_{n-1})$$

Also:

$$y_0 \stackrel{!}{=} p_n(x_0) = b_0$$

$$y_1 \stackrel{!}{=} p_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1-x_0)$$

$$\vdots$$

$$y_n \stackrel{!}{=} p_n(x_n) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + b_n(x_n-x_0)\cdot \ldots \cdot(x_n-x_{n-1})$$

Berechnung ist mittels rekursivem Einsetzen möglich, falls $x_i \neq x_j,\ i \neq j$

(4) Beispiel Dividierte Differenzen:

gegeben: x_i: 1 2 3

y_i: 3 2 6

gesucht: Polynom $p_2(x)$ 2-ten Grades

Schema:

$x_{i+2}-x_i$	$x_{i+1}-x_i$	x_i	$[x_i]=y_i$	Δ	$[x_{i+1},x_i]$	Δ	$[x_0,x_1,x_2]$
		1	3				
	1			-1	-1		
2		2	2			5	2.5
	1			4	4		
		3	6				

$$\Rightarrow [x_0] = 3, \quad [x_0 x_1] = -1, \quad [x_0 x_1 x_2] = 2.5$$

$$\Rightarrow p_2(x) = [x_0] + [x_0 x_1](x-x_0) + [x_0 x_1 x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$= 3 - (x-1) + 2.5(x-1)(x-2)$$

$$= 2.5x^2 - 8.5x + 9$$