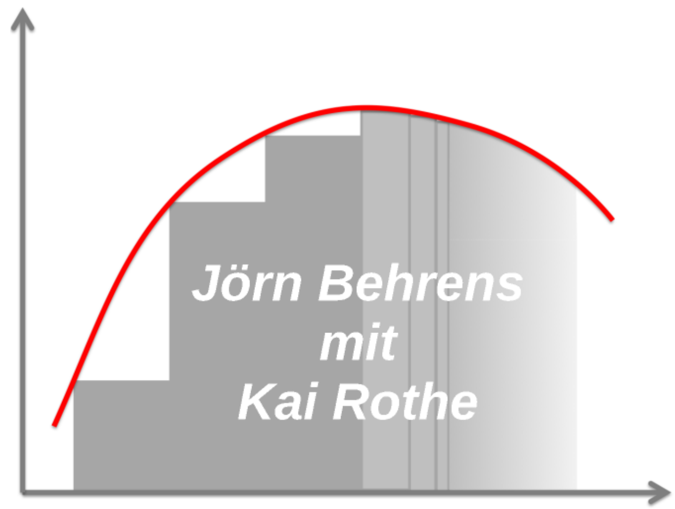
# Analysis II




Diskrete Fourier-Analyse

Buch Kapitel 3.9

# Erinnerung

**Frage**: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi$-periodische Funktion. Lässt sich dann eine Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

für geeignete $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}$ finden?

Die Partialsummen $(s_m)$ werden durch die trigonometrischen Polynome

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad m = 0, 1, \ldots$$

definiert.

**Satz**: (Konvergenz von Fourier-Reihen im quadratischen Mittel)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi$-periodische, stückweise stetige Funktion.
Dann konvergiert die zugehörige Fourier-Reihe im quadratischen Mittel gegen $f$.

Für die Partialsummen $s_m$ der Fourier-Reihe von $f$ gilt:

$$\lim_{m \to \infty} \|f - s_m\|_2 = 0.$$

**Bemerkung**: Die Koeffizienten $\alpha_n$ der kompakten Form einer Fourier-Reihe lassen sich wieder durch Integration berechnen:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Außerdem gelten die Beziehungen zu den reellen Koeffizienten $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n + \alpha_{-n}, \\ b_n &= i(\alpha_n - \alpha_{-n}). \end{aligned}$$

**Bemerkung**: (Komplexe Schreibweise einer Fourier-Reihe)

Mit den folgenden Vereinbarungen und den Eulerschen Formeln:

- $a_{-n} := a_n$, $b_0 := 0$ und $b_{-n} := -b_n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$,
- $\alpha_n := \frac{a_n - ib_n}{2}$ für $n \in \mathbb{Z}$,
- $\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ und $\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$,

kann man eine Fourier-Reihe zu einer Funktion $f(x)$ kompakt schreiben:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

**Frage**: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi$-periodische Funktion. Lässt sich dann eine Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

für geeignete $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{R}$ finden?

Die Partialsummen $(s_m)$ werden durch die trigonometrischen Polynome

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad m = 0, 1, \dots$$

definiert.

**Satz**: (Konvergenz von Fourier-Reihen im quadratischen Mittel)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $2\pi$-periodische, stückweise stetige Funktion.
Dann konvergiert die zugehörige Fourier-Reihe im quadratischen Mittel gegen $f$.

Für die Partialsummen $s_m$ der Fourier-Reihe von $f$ gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \|f - s_m\|_2 = 0.$$

**Bemerkung**: (Komplexe Schreibweise einer Fourier-Reihe)

Mit den folgenden Vereinbarungen und den Eulerschen Formeln:

- $a_{-n} := a_n$, $b_0 := 0$ und $b_{-n} := -b_n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$,
- $\alpha_n := \frac{a_n - ib_n}{2}$ für $n \in \mathbb{Z}$,
- $\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ und $\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$,

kann man eine Fourier-Reihe zu einer Funktion $f(x)$ kompakt schreiben:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

**Bemerkung**: Die Koeffizienten $\alpha_n$ der kompakten Form einer Fourier-Reihe lassen sich wieder durch Integration berechnen:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Außerdem gelten die Beziehungen zu den reellen Koeffizienten $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n + \alpha_{-n}, \\ b_n &= i(\alpha_n - \alpha_{-n}). \end{aligned}$$

# Komplexe Fourier-Reihen

**Vorbemerkung**: Bei der Einführung von Fourier-Reihen haben wir keine speziellen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ verwendet.
Für die Einführung von Fourier-Reihen für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ muss lediglich beachtet werden:

$$\int f(t)\, dt = \int \mathrm{Re} f(t)\, dt + i \int \mathrm{Im} f(t)\, dt.$$

**Satz**: (Parsevalsche Gleichung)
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $L$-periodische, in $[0, L]$ stückweise stetige Funktionen mit den Fourier-Reihen wie im vorherigen Satz ($f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}$ und $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t}$). Dann gelten

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n} &= \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \overline{g(t)}\, dt, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 &= \frac{1}{L} \int_0^L |f(t)|^2\, dt \quad \text{(Parsevalsche Gleichung)}. \end{aligned}$$

**Satz**: (Rechenregeln für Fourier-Reihen)
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $L$-periodische, stückweise glatte Funktionen mit den Fourier-Reihen

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t} \\ g(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t} \end{aligned}$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{L}$, wobei $L$ als Schwingungsdauer und $\omega$ als Kreisfrequenz interpretiert werden können. Es gelten dann die folgenden Rechenregeln:

1. **Linearität**: Mit $a, b \in \mathbb{C}$
$$af + bg = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a\alpha_n + b\beta_n) e^{in\omega t}$$
2. **Konjugation** bzw. **Zeitumkehr**:
$$\overline{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\alpha_{-n}} e^{in\omega t}, \quad \text{bzw.} \quad f(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} e^{in\omega t}.$$
3. **Streckung** oder Ähnlichkeit:
$$f(ct) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inc\omega t}$$
4. **Verschiebung im Zeitbereich** (Phasenverschiebung):
$$f(t + a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{in\omega a} \alpha_n) e^{in\omega t}$$
5. **Verschiebung im Frequenzbereich**:
$$e^{ik\omega t} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-k} e^{in\omega t}$$

**Vorbemerkung**: Bei der Einführung von Fourier-Reihen haben wir keine speziellen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ verwendet.
Für die Einführung von Fourier-Reihen für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ muss lediglich beachtet werden:

$$\int f(t)\, dt = \int \mathrm{Re} f(t)\, dt + i \int \mathrm{Im} f(t)\, dt.$$

**Satz**: (Rechenregeln für Fourier-Reihen)
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $L$-periodische, stückweise glatte Funktionen mit den Fourier-Reihen

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t} \\ g(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t} \end{aligned}$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{L}$, wobei $L$ als Schwingungsdauer und $\omega$ als Kreisfrequenz interpretiert werden können. Es gelten dann die folgenden Rechenregeln:

1. **Linearität**: Mit $a, b \in \mathbb{C}$

$$af + bg = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a\alpha_n + b\beta_n) e^{in\omega t}$$

1. **Linearität**: Mit $a, b \in \mathbb{C}$

$$af + bg = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a\alpha_n + b\beta_n)e^{in\omega t}$$

2. **Konjugation** bzw. **Zeitumkehr**:

$$\overline{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\alpha_{-n}} e^{in\omega t}, \quad \text{bzw.} \quad f(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} e^{in\omega t}.$$

3. **Streckung** oder Ähnlichkeit:

$$f(ct) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inc\omega t}$$

4. **Verschiebung im Zeitbereich** (Phasenverschiebung):

$$f(t+a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{in\omega a}\alpha_n)e^{in\omega t}$$

5. **Verschiebung im Frequenzbereich**:

$$e^{ik\omega t} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-k} e^{in\omega t}$$

nit
=

**Satz**: (Parsevalsche Gleichung)
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $L$-periodische, in $[0, L]$ stückweise stetige Funktionen mit den Fourier-Reihen wie im vorherigen Satz ($f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}$ und $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t}$). Dann gelten

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n} &= \frac{1}{L} \int_0^L f(t)\overline{g(t)}\, dt,\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 &= \frac{1}{L} \int_0^L |f(t)|^2\, dt \quad \text{(Parsevalsche Gleichung).}\end{aligned}$$

**Bemerkung**: Mit der Beziehung $\alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ und Zusammenfassen der Terme mit Indizes $n$ und $-n$ ergibt sich die Parsevalsche Gleichung der Form

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{L} \int_0^L |f(t)|^2\, dt,$$

# *Motivation*

Hören Sie den Unterschied?

**Ed Sheeran**
Shape of You

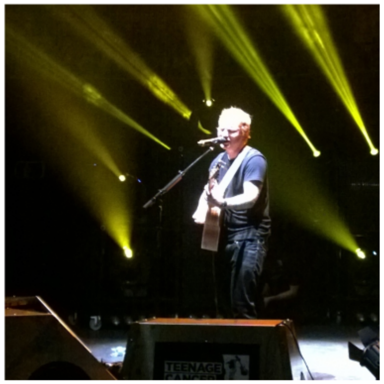
https: //commons.wikimedia.org/wiki/File:Ed_Sheeran,_Royal_Albert_Hall_(13401567334).jpg

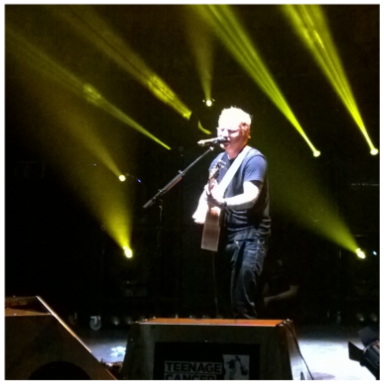
(WAF, 41.2 MB)

(MP3, 3.7 MB)

# Hören Sie den Unterschied?

**Ed Sheeran**
Shape of You





https: //commons.wikimedia.org/wiki/File:Ed_Sheeran,_Royal_Albert_Hall_(13401567334).jpg

(WAF, 41.2 MB)

(MP3, 3.7 MB)

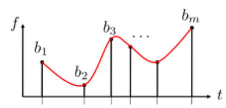
Kompressionsfactor: 11.1

# Interpolation

Gegeben: $i = 1 : m \quad (t_i, b_i)$ Daten

Aufgabe: Finde $f(x)$ so dass $f(t_i) = b_i$

Interpolations Problem




**Satz**: (Interpolierendes Fourier-Polynom)
Es seien $k = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$) Werte $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k = y_0$ einer $2\pi$-periodischen Funktion an den äquidistant verteilten Stützstellen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = x_0 + 2\pi$ gegeben. Das spezielle Fourier-Polynom vom Grad $n$

$$g_n^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} [a_k^* \cos(kx) + b_k^* \sin(kx)] + \frac{a_n^*}{2} \cos(nx)$$

mit Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0^* &= \frac{2}{k}(y_0 + y_1 + \cdots + y_n) \\ a_m^* &= \frac{2}{k}\sum_{j=1}^{k-1}(y_j \cos(m\frac{j2\pi}{k}) \\ b_m^* &= \frac{2}{k}\sum_{j=1}^{k-1}(y_j \sin(m\frac{j2\pi}{k}) \end{aligned}$$

ist das eindeutig bestimmte interpolierende Polynom zu den gegebenen Stützstellen, d.h. es gilt:

$$g_n^*(x_j) = y_j, \quad j = 0, \dots, k.$$

Definiere:

mit

Dann ist z

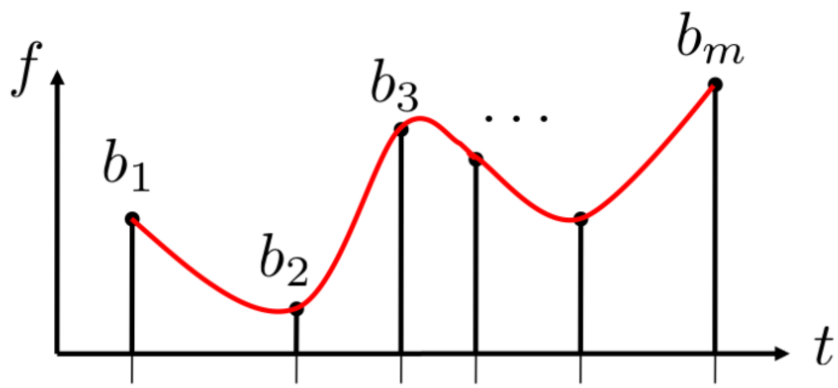
**Kosten**: Wir zählen in Anz

- Diskrete Fourier Tra
- Schnelle Fourier Tra
- Schnelle Fourier Tra

Gegeben: $i = 1 : m \quad (t_i, b_i)$ Daten

Aufgabe: Finde $f(x)$ so dass $f(t_i) = b_i$

$\boxed{\text{Interpolations Problem}}$



**Satz**: (Interpolierendes Fourier-Polynom)
Es seien $k = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$ Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k = y_0$ einer $2\pi$-periodischen Funktion an den äquidistant verteilten Stützstellen $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k = x_0 + 2\pi$ gegeben. Das spezielle Fourier-Polynom vom Grad $n$

$$g_n^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} [a_k^* \cos(kx) + b_k^* \sin(kx)] + \frac{a_n^*}{2} \cos(nx)$$

mit Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_0^* &= \frac{2}{k}(y_0 + y_1 + \cdots + y_n) \\
a_m^* &= \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} (y_j \cos(m\frac{j2\pi}{k}) \\
b_m^* &= \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} (y_j \sin(m\frac{j2\pi}{k})
\end{aligned}$$

ist das eindeutig bestimmte interpolierende Polynom zu den gegebenen Stützstellen, d.h. es gilt:

$$g_n^*(x_j) = y_j, \quad j = 0, \ldots, k.$$

**Bemerkung**: In dieser Darstellung ist es unerheblich, ob $y_j$ als einzeln gegebene Messpunkte oder als Auswertungen einer Funktion $y_j = f(x_j)$ gegeben sind.

**Bemerkung**: In dieser Darstellung ist es unerheblich, ob $y_j$ als einzeln gegebene Messpunkte oder als Auswertungen einer Funktion $y_j = f(x_j)$ gegeben sind.

# Exkurs: Scheller Algorithmus

### *Abbildung*

Definiere: $F_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$,
$f(x_j) \mapsto c_j, \quad j = 0:n.$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(n)} &= f(x_j)_{j=0:n}, \\ \mathbf{c}^{(n)} &= c_{j=0:n}. \end{aligned}$$

Dann ist zu lösen:

$$\boxed{\mathbf{c}^{(n)} = F_n(\mathbf{y}^{(n)}).}$$

### *Lösungsweg*

$$\mathbf{c}^{(n)} = F_n(\mathbf{y}^{(n)}).$$

$f(x_j)$

$$c_m^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} y_j^{(n)} \omega_n^{-jm}, \quad m = 0:n.$$

$$\omega_n := e^{ih}, \quad h = \frac{2\pi}{(n+1)}$$

(Annahme: $n = 2^\alpha$ )

**Kosten**: Wir zählen in Anzahl Fließkommaoperationen (flops) in *führender Ordnung*

- Diskrete Fourier Transformation (DFT)

$$\#\text{flops} = 8n^2.$$

- Schnelle Fourier Transformation (FFT) (2 Level)

$$\#\text{flops} = 2 \cdot \left[8(\tfrac{n}{2})^2\right] = 4n^2$$

- Schnelle Fourier Transformation (FFT) ($\alpha$ Level)

$$\#\text{flops} = n \log_2 n$$

### *Divide-et-Impera - 1 (divide)*

(1)
$$\begin{aligned} c_{2m}^{(n)} &= \sum_{j=0}^{n/2} y_j^{(n)} \omega_n^{-2jm} + \sum_{j=0}^{n/2} y_{j+n/2}^{(n)} \omega_n^{-2(j+n/2)m} \\ &= \sum_{j=0}^{n/2} (y_j^{(n)} + y_{j+n/2}^{(n)}) \omega_{n/2}^{-jm} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} c_{2m+1}^{(n)} &= \sum_{j=0}^{n/2} y_j^{(n)} \omega_n^{-j(2m+1)} + \sum_{j=0}^{n/2} y_{j+n/2}^{(n)} \omega_n^{-(j+n/2)(2m+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{n/2} \left[(y_j^{(n)} - y_{j+n/2}^{(n)}) \omega_n^{-j}\right] \omega_{n/2}^{-jm} \end{aligned}$$

Es gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \omega_{n/2}, \\ \omega_n^{2m\ n/2} &= 1, \\ \omega_n^{(2m+1)\ n/2} &= -1. \end{aligned}$$

### *Divide-et-Impera - 2 (impera)*

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(n/2)} &= (c_0^{(n)}, c_2^{(n)}, \ldots, c_n^{(n)}), \\ \gamma^{(n/2)} &= (c_1^{(n)}, c_3^{(n)}, \ldots, c_{n-1}^{(n)}), \\ y_j^{(n/2)} &= y_j^{(n)} + y_{j+n/2}^{(n)}, \quad j = 0:n/2, \\ \eta_j^{(n/2)} &= \left[y_j^{(n)} - y_{j+n/2}^{(n)}\right] \omega_n^{-j}. \end{aligned}$$

The original problem is replaced by two problems of half the size!

$$\mathbf{c}^{(n/2)} = F_{n/2}(\mathbf{y}^{(n/2)}), \quad \gamma^{(n/2)} = F_{n/2}(\eta^{(n/2)}).$$

## *Abbildung*

Definiere:
$$\begin{aligned} F_n : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \\ f(x_j) &\mapsto c_j, \qquad j = 0 : n. \end{aligned}$$

mit
$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(n)} &= f(x_j)_{j=0:n}, \\ \mathbf{c}^{(n)} &= c_{j=0:n}. \end{aligned}$$

Dann ist zu lösen:

$$\boxed{\mathbf{c}^{(n)} = F_n(\mathbf{y}^{(n)}).}$$

## *Lösungsweg*

$$\mathbf{c}^{(n)} = F_n(\mathbf{y}^{(n)}).$$

$f(x_j)$

$$c_m^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} y_j^{(n)} \omega_n^{-jm}, \quad m = 0 : n.$$

$$\omega_n := e^{ih}, \quad h = \frac{2\pi}{(n+1)}$$

(Annahme: $n = 2^{\alpha}$ )

# Divide-et-Impera - 1 (divide)

(1)
$$\boxed{\begin{aligned} c_{2m}^{(n)} &= \sum_{j=0}^{n/2} y_j^{(n)} \omega_n^{-2jm} + \sum_{j=0}^{n/2} y_{j+n/2}^{(n)} \omega_n^{-2(j+n/2)m} \\ &= \sum_{j=0}^{n/2} (y_j^{(n)} + y_{j+n/2}^{(n)}) \omega_{n/2}^{-jm} \end{aligned}}$$

(2)
$$\boxed{\begin{aligned} c_{2m+1}^{(n)} &= \sum_{j=0}^{n/2} y_j^{(n)} \omega_n^{-j(2m+1)} + \sum_{j=0}^{n/2} y_{j+n/2}^{(n)} \omega_n^{-(j+n/2)(2m+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{n/2} \left[ (y_j^{(n)} - y_{j+n/2}^{(n)}) \omega_n^{-j} \right] \omega_{n/2}^{-jm} \end{aligned}}$$

Es gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \omega_{n/2}, \\ \omega_n^{2m\ n/2} &= 1, \\ \omega_n^{(2m+1)\ n/2} &= -1. \end{aligned}$$

# *Divide-et-Impera - 2 (impera)*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}^{(n/2)} &= (c_0^{(n)}, c_2^{(n)}, \ldots, c_n^{(n)}), \\
\gamma^{(n/2)} &= (c_1^{(n)}, c_3^{(n)}, \ldots, c_{n-1}^{(n)}), \\
y_j^{(n/2)} &= y_j^{(n)} + y_{j+n/2}^{(n)}, \quad j = 0 : n/2, \\
\eta_j^{(n/2)} &= \left[ y_j^{(n)} - y_{j+n/2}^{(n)} \right] \omega_n^{-j}.
\end{aligned}
$$

The original problem is replaced by two problems of half the size!

$$\mathbf{c}^{(n/2)} = F_{n/2}(\mathbf{y}^{(n/2)}). \quad \gamma^{(n/2)} = F_{n/2}(\eta^{(n/2)}).$$

**Kosten**: Wir zählen in Anzahl Fließkommaoperationen (flops) in *führender Ordnung*

- Diskrete Fourier Transformation (DFT)

$$\#\text{flops} = 8n^2.$$

- Schnelle Fourier Transformation (FFT) (2 Level)

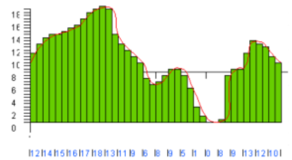
$$\#\text{flops} = 2 \cdot \left[8(\frac{n}{2})^2\right] = 4n^2$$

- Schnelle Fourier Transformation (FFT) ($\alpha$ Level)

$$\#\text{flops} = n \log_2 n$$

# Daten Kompression

**Sampling**: (Wie digitale Musik funktioniert)
Schallwellen werden mit 44,1 KHz abgetastet.



Berechnung der Dateigröße:

$$\begin{aligned}\text{Datei} &= 44.100\,\frac{\text{Datenpunkte}}{\text{Kanal} \times \text{Sekunde}} \\ &\cdot\ 2\,\frac{\text{bytes}}{\text{Datenpunkt}} \cdot 2\ \text{Kanäle} \cdot 234\ \text{Sekunden} \\ &= 41.277.600\ \text{bytes} \\ &= 41,2\ \text{Mbytes}\end{aligned}$$

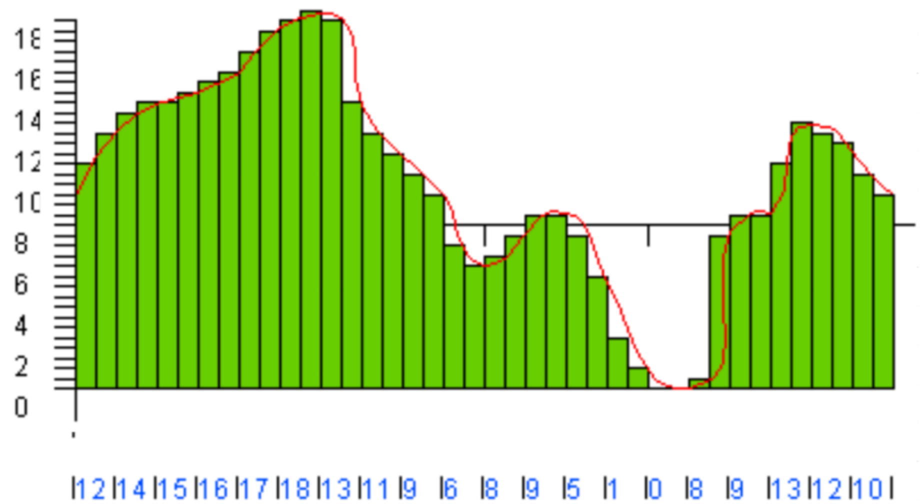
**Kompression**: (Die Mathematik im MP3-Format)
Die "gesamplete" Funktion wird als Fourier-Reihe dargestellt mit

$$\text{song}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k e^{i\omega k t}, \quad \text{mit } \alpha_k = F_n(y(t_k)).$$

Nun werden folgende Vereinfachungen/Kompressionen vorgenommen:

- "Unwichtige" Koeffizienten der Reihe werden vernachlässigt und nicht gespeichert
- Dabei wird ein perzentuelles Modell verwendet (was hört das menschliche Ohr?)
- Die Koeffizienten werden in einer bestimmten Art gespeichert (Huffmann Enkodierung)
- Diverse weitere technische Optimierungen...

**Sampling**: (Wie digitale Musik funktioniert)
Schallwellen werden mit 44,1 KHz abgetastet.




Berechnung der Dateigröße:

$$\begin{aligned}\text{Datei} &= 44.100 \frac{\text{Datenpunkte}}{\text{Kanal} \times \text{Sekunde}} \\ &\cdot\ 2 \frac{\text{bytes}}{\text{Datenpunkt}} \cdot 2 \text{ Kanäle} \cdot 234 \text{ Sekunden} \\ &= 41.277.600 \text{ bytes} \\ &= 41,2 \text{ Mbytes}\end{aligned}$$

**Kompres**
Die “gesa

Nun werd

- “Ur
iche
- Dal
Ohr
- Die
Enk
- Div

**Kompression**: (Die Mathematik im MP3-Format)
Die "gesamplete" Funktion wird als Fourier-Reihe dargestellt mit

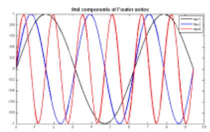
$$\text{song}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k e^{i\omega kt}, \quad \text{mit } \alpha_k = F_n(y(t_k)).$$

Nun werden folgende Vereinfachungen/Kompressionen vorgenommen:

- "Unwichtige" Koeffizienten der Reihe werden vernachlässigt und nicht gespeichert
- Dabei wird ein perzentuelles Modell verwendet (was hört das menschliche Ohr?)
- Die Koeffizienten werden in einer bestimmten Art gespeichert (Huffmann Enkodierung)
- Diverse weitere technische Optimierungen...

# Datenanalyse

**Idee**: (Datenanalyse)
Die Wellenkomponenten $e^{in\omega t}$ sagen etwas über die Frequenzanteile des Signals aus!



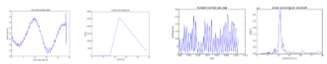
Also:

- Interpoliere Daten mit diskretem trigonometrischen Polynom (diskrete Fourier-Reihe)
- Die Fourier-Koeffizienten geben die "Stärke" jeder Wellenlänge wieder.
- Die einzelnen Fourier-Komponenten repräsentieren die jeweilige Frequenz.

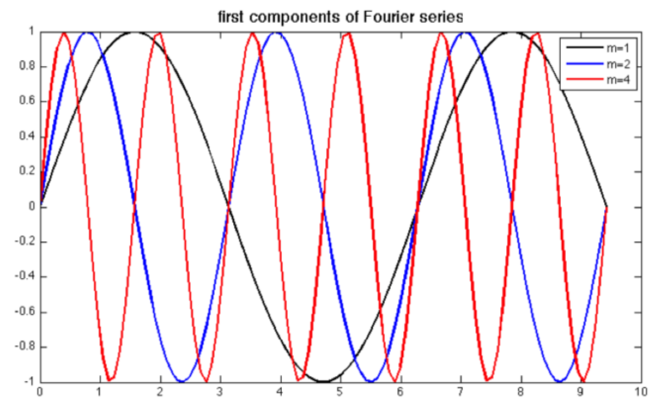
***Datenanalyse Schritte***

- Interpoliere Daten
- Plotte Koeffizienten

2 Beispiele:
Tidenpegel Sonneflecken

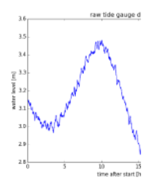


**Idee**: (Datenanalyse)
Die Wellenkomponenten $e^{in\omega t}$ sagen etwas über die Frequenzanteile des Signals aus!




Also:

- Interpoliere Daten mit diskretem trigonometrischen Polynom (diskrete Fourier-Reihe)
- Die Fourier-Koeffizienten geben die “Stärke” jeder Wellenlänge wieder.
- Die einzelnen Fourier-Komponenten repräsentieren die jeweilige Frequenz.



ile des Signals

# *Datenanalyse Schritte*

- Interpoliere Daten
- Plotte Koeffizienten

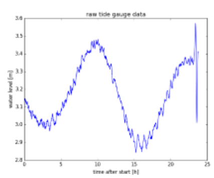
2 Beispiele:

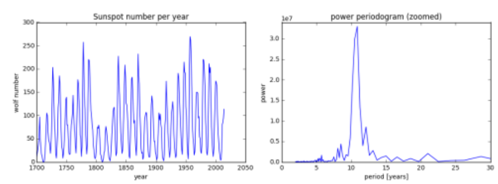
Tidenpegel Sonneflecken

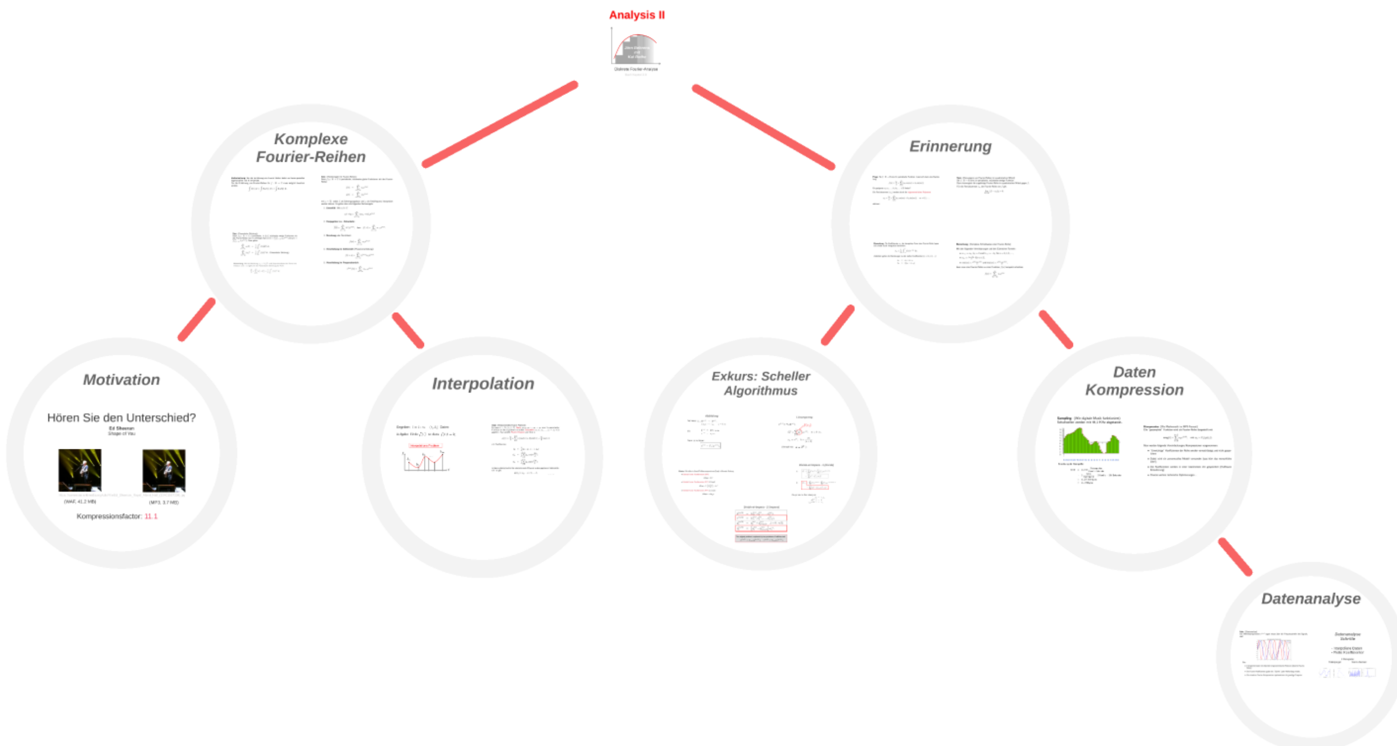
krete Fourier-

wieder.

Frequenz.




Analysis II
Komplexe Fourier-Reihen
Erinnerung
Motivation
Hören Sie den Unterschied?
Kompressionsfactor: 11:1
Interpolation
Exkurs: Scheller Algorithmus
Daten Kompression
Datenanalyse