ANALYSIS II

Woche 10 / J. Behrens

① Besselsche Ungleichung:

- Sei $\quad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$
- Es gilt:

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f^2(x) - 2f(x)s_n(x) + s_n^2(x)] \, dx$$

Orthogonalitätsrelationen

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx - \pi \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

$\boxtimes$

② Fourier-Koeffizienten (un) gerader Funktionen:

- f ungerade $\Rightarrow f \cdot \sin =: g$ gerade (da sin ungerade)
- $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx = \int_{-\pi}^{0} g(x) \, dx + \int_{0}^{\pi} g(x) \, dx$

$$= -\int_{0}^{-\pi} g(x) \, dx + \int_{0}^{\pi} g(x) \, dx$$

Substitution $u = -x$

$$= \int_{0}^{\pi} g(u) \, du + \int_{0}^{\pi} g(x) \, dx = 2 \int_{0}^{\pi} g(x) \, dx$$

- Falls f gerade $\Rightarrow f \cdot \cos = g$ gerade, also gilt analog wie oben $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \, dx = 2 \int_{0}^{\pi} g(x) \, dx$.

• f gerade $\Rightarrow$ $f \cdot \sin = u$ ungerade und $\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,dx = 0$

Daher ist für f gerade $b_k = 0$ (analog: für f ungerade: $a_k = 0$).

$\boxtimes$

3 Sägezahnfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{für } -\pi < x < \pi, \ a > 0 \\ 0 & \text{für } x = \pi \end{cases}$$

periodisch fortgesetzt. f ist ungerade, also $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$

• Für b_k gilt:

$$b_k = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{2a}{\pi} \left\{ \left[-x \frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kx)\,dx}_{=0} \right\}$$

$$= \frac{2a}{k} (-1)^{k+1}$$

• Für die Reihendarstellung:

$$f(x) = 2a \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - + \dots \right)$$

• Setze $a = 1$ und betrachte $]-\pi, \pi[$:

$$x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - + \dots \right)$$

(4) Komplexe Schreibweise:

- Wir wissen: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise glatt und 2π-periodisch.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

- Außerdem gelten die Eulerschen Formeln:

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{i2}$$

- Damit:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{i2} \right] \quad | \; i^{-1} = -i$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right]$$

- Ziel: Kompakte Schreibweise

Dazu $b_0 := 0$, $a_{-n} := a_n$, $b_{-n} := -b_n$ $\quad n = 0, 1, \dots$

Setze $\alpha_n := \frac{a_n - ib_n}{2}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

- Erhalte: $f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx} \right]$

- Für die m-te Partialsumme gilt:

$$s_m(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{m} \left(\alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx} \right) = \sum_{n=-m}^{m} \alpha_n e^{inx}$$

- Da die Reihe konvergiert, schreibe

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}}$$

Wir fassen dabei $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n$ auf als $\sum_{n=0}^{\infty} c_n + \sum_{n=-\infty}^{0} c_n$ und bilden eigentlich 2 Grenzwerte.