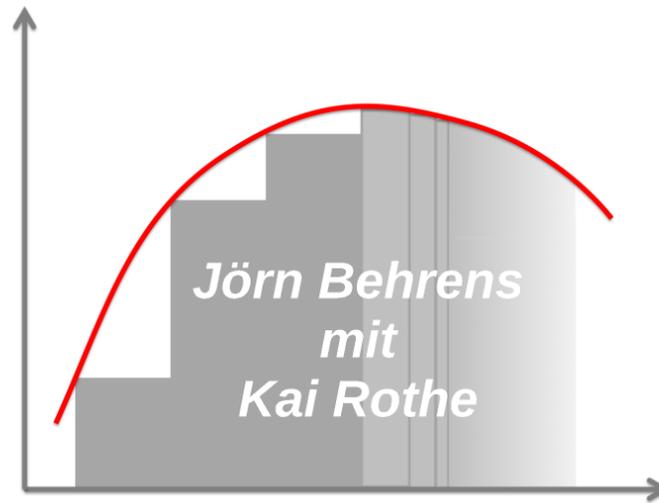


Analysis II



Fourier-Reihe

Buch Kapitel 3.8-3.9

Erinnerung Sinus/Cosinus

Komplexe Exponentialfunktion: Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

die **komplexe Exponentialfunktion**. Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, also ist eine Funktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert.

Bemerkung (Taylorreihe für die Sinusfunktion)

Aus dem Satz von Taylor folgt:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{2k+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{2k+2}(x) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots + R_{2k+2}(x) \end{aligned}$$

wobei $R_{2k+2}(x) = \frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$ mit $\xi \in [0, x]$.
Analoges gilt für cos.

Definition: (Sinus und Cosinus)

Auf ganz \mathbb{R} sind folgende Reihen konvergent:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Die so erklärten Funktionen heißen **Sinus- und Cosinus Funktion**.

Wichtige Eigenschaften:
• $\exp(z) \exp(w) = \exp(z+w)$
• $\exp(z) \exp(2\pi i k) = \exp(z)$
• $\exp(z) \exp(2\pi i k) = \exp(z)$

Periodizität von cos und sin

Satz (Periodizität der trigonometrischen Funktionen)

Die Funktionen

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sind **periodisch** und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Komplexe Exponentialfunktion: Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

die **komplexe Exponentialfunktion**. Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, also ist eine Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert.

Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion: Es gilt für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$
- $\exp(z) \neq 0$
- $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
- $a^z = \exp(z \ln(a))$ für $0 < a \in \mathbb{R}$
- $e^z = \exp(z)$

Definition: (Sinus und Cosinus)

Auf ganz \mathbb{R} sind folgende Reihen konvergent:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Die so erklärten Funktionen heißen **Sinus- und Cosinus Funktion**.

Eigenschaften: (Sinus und Cosinus)

Aus den Reihendefinitionen für die Cosinus- und Sinusfunktion, sowie dem Additionstheorem für \exp ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

- $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (Eulersche Formel) und $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$
- $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ und $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$
- $\cos(-x) = \cos(x)$ (gerade Fkt.) und $\sin(-x) = -\sin(x)$ (ungerade Fkt.)
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ (Additionsformel für \cos)
- $\sin(x \pm y) = \cos x \sin y \pm \sin x \cos y$ (Additionsformel für \sin)
- $\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y$
- $\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$ und $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$

Periodizität von \cos und \sin

Definition (Zahl π)

Die Zahl π ist die eindeutig bestimmte reelle Zahl, für die gilt:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{\pi}{2} < 2.$$

Satz (Periodizität der trigonometrischen Funktionen)

Die Funktionen

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sind **periodisch** und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).$$

Bemerkung (Taylorreihe für die Sinusfunktion)

Aus dem Satz von Taylor folgt:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{2k+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{2k+2}(x) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots + R_{2k+2}(x)\end{aligned}$$

wobei $R_{2k+2}(x) = \frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$ mit $\xi \in [0, x]$.

Analoges gilt für cos.

D
D

S;
D

Konstruktion von Funktionenreihen

Konstruktion durch gliedweise Addition: (\cosh)

Es gilt $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Mit den Reihen für e^x bzw. e^{-x} folgt:

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2} \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right] \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!} \end{aligned}$$

Bemerkung: diese Reihe ist – wie die Exponentialreihe – beständig konvergent.

Konstruktion mittels Cauchy-Produkt: ($e^{-x} \sin x$)

Mit Hilfe des Cauchy-Produktes konstruiert man eine Reihe für $e^{-x} \sin x$:

$$\begin{aligned} e^{-x} \sin x &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} \right) \\ &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \dots \end{aligned}$$

Konstruktion durch Integration: ($\arctan x$)

Durch Integration von $\frac{1}{1+x^2}$ ergibt sich (beachte $\arctan 0 = 0$):

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Bemerkung: wieder ist die Konvergenz nur für $-1 < x < 1$ gewährleistet.

Konstruktion durch gliedweises Differenzieren: ($\frac{1}{1-x^2}$)

Die geometrische Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ lässt sich gliedweise Differenzieren zu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots \end{aligned}$$

Bemerkung: Die so konstruierte Reihe konvergiert nur für $|x| < 1$, da die geometrische Reihe nur dann konvergiert!

Konstruktion durch Substitution: ($\frac{1}{1+x^2}$)

Ausgehend von der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ lässt sich durch Substitution $u = -x^2$ konstruieren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-u} &= \sum_{k=0}^{\infty} u^k \\ \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \end{aligned}$$

Bemerkung: gilt wieder für $|x| < 1$.

E
Sir

Konstruktion durch gliedweise Addition: (cosh)

Es gilt $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Mit den Reihen für e^x bzw. e^{-x} folgt:

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{1}{2} \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right] \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}.\end{aligned}$$

Bemerkung: diese Reihe ist – wie die Exponentialreihe – beständig konvergent.

Konstruktion mittels Cauchy-Produkt: $(e^{-x} \sin x)$

Mit Hilfe des Cauchy-Produktes konstruiert man eine Reihe für $e^{-x} \sin x$:

$$\begin{aligned} e^{-x} \sin x &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \dots \end{aligned}$$

Konstruktion durch gliedweises Differenzieren: $\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)$

Die geometrische Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ lässt sich gliedweise Differenzieren zu:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (x^k)' \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots\end{aligned}$$

Bemerkung: Die so konstruierte Reihe konvergiert nur für $|x| < 1$, da die geometrische Reihe nur dann konvergiert!

Konstruktion durch Substitution: $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

Ausgehend von der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ lässt sich durch Substitution $u = -x^2$ konstruieren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-u} &= \sum_{k=0}^{\infty} u^k \\ \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \end{aligned}$$

Bemerkung: gilt wieder für $|x| < 1$.

Konstruktion durch Integration: ($\arctan x$)

Durch Integration von $\frac{1}{1+x^2}$ ergibt sich (beachte $\arctan 0 = 0$):

$$\arctan x = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Bemerkung: wieder ist die Konvergenz nur für $-1 < x < 1$ gewährleistet.

Erinnerung Taylorreihe

Konstruktion durch Taylorreihe:

Jede auf $I \subset \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion f lässt sich darstellen (Satz von Taylor):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x, x_0),$$

wobei $x, x_0 \in I$ und $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ das Lagrange Restglied mit ξ zwischen x und x_0 .

Folgerung: (Taylorreihe)

Falls auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ die Funktion f beliebig oft differenzierbar ist und für das Restglied gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0,$$

so lässt sich f in einer Potenzreihe entwickeln:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

wobei $x, x_0 \in I$. Diese Reihe heißt **Taylorreihe**. Ist $x_0 = 0$, so heißt die Reihe auch **McLaurin-Reihe**.

Definition: (Perio Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

erfüllt $f(x+L) = f(x)$ für alle $x \in I$.
Das kleinste $L > 0$ nennt man die **Periode** von f .
Jedes n -fache der Periode nL heißt **periodische Funktion**.

Frage: Wann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0$?

- Für elementare Funktionen mit Definitionsbereich D und $x, x_0 \in I \subset D$ immer!
- Für x aus dem Konvergenzintervall der Reihe.
- Falls $|f^{(k)}(x_0)| \leq M$ für $M > 0$ unabhängig von k .

Konstruktion durch Taylorreihe:

Jede auf $I \subset \mathbb{R}$ $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion f lässt sich darstellen (Satz von Taylor):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0),$$

wobei $x, x_0 \in I$ und $R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ das Lagrange Restglied mit ξ zwischen x und x_0 .

Folgerung:

Falls auf I f und für das

so lässt sich

wobei x, x_0
McLaurin-R

Folgerung: (Taylorreihe)

Falls auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ die Funktion f beliebig oft differenzierbar ist und für das Restglied gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0,$$

so lässt sich f in einer Potenzreihe entwickeln:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

wobei $x, x_0 \in I$. Diese Reihe heißt **Taylorreihe**. Ist $x_0 = 0$, so heißt die Reihe auch **McLaurin-Reihe**.

Frage: Wann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0$?

- Für elementare Funktionen mit Definitionsbereich D und $x, x_0 \in I \subset D$ immer!
- Für x aus dem Konvergenzintervall der Reihe.
- Falls $|f^{(k)}(x_0)| \leq M$ für $M > 0$ unabhängig von k .

Periodische Funktionen

Definition: (Periodische Funktion)
Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ welche

$$f(x+L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

erfüllt ($L > 0$ konstant), heißt **periodische Funktion**.
Das kleinste L , für welches die Gleichung gilt, heißt **Minimalperiode** oder primitive Periode von f .
Jedes n -fache der Minimalperiode ist wieder Periode ($n \in \mathbb{N}$). f heißt auch **L -periodische Funktion**.

Definition: (Trigonometrisches Funktionensystem)
Die Funktionen $1, \sin(nx), \cos(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ bilden das **trigonometrische Funktionensystem** $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$.

Konkret: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische Funktion. Dann ist das Ziel, eine Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

für geeignete $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{R}$ zu finden.

Die Partialsummen (s_m) werden durch die **trigonometrischen Polynome**

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad m = 0, 1, \dots$$

definiert.

beliebig oft differenzierbar ist

t ,

- 0, so heißt die Reihe auch

Definition: (Periodische Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ welche

$$f(x + L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

erfüllt ($L > 0$ konstant), heißt **periodische Funktion**.

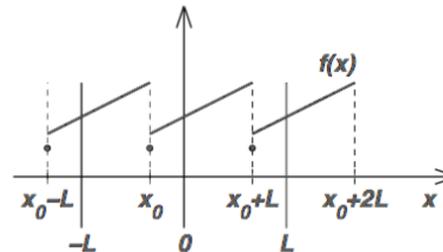
Das kleinste L , für welches die Gleichung gilt, heißt **Minimalperiode** oder primitive Periode von f .

Jedes n -fache der Minimalperiode ist wieder Periode ($n \in \mathbb{N}$). f heißt auch **L -periodische Funktion**.

Beispiel: $f(x) = \sin x$

- Minimalperiode: 2π
- 2π -periodische Funktion
- Perioden $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$

Graphisches Beispiel:



D
Di
tri

Definition: (Trigonometrisches Funktionssystem)

Die Funktionen $1, \sin(nx), \cos(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$ bilden das **trigonometrische Funktionensystem** $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}$.

Ziel:

Periodische Funktionen mit Hilfe des trigonometrischen Funktionensystems darstellen!

Bemerkung: Jede L -periodische Funktion f lässt sich durch die Transformation

$$\hat{f}(t) = f\left(t \frac{L}{2\pi}\right)$$

in eine 2π -periodische Funktion \hat{f} umwandeln. (Betrachte also 2π -periodische Funktionen).

Konkret: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische Funktion. Dann ist das Ziel, eine Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

für geeignete $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{R}$ zu finden.

Die Partialsummen (s_m) werden durch die **trigonometrischen Polynome**

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad m = 0, 1, \dots$$

definiert.

Fourier Reihe

Frage: Lässt sich ein $f(x)$ durch geeignete Wahl von a_n, b_n darstellen als

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right]? \end{aligned}$$

1

Berechnungsformel: (Fourier Analyse)

Unter der Voraussetzung, dass es eine Darstellung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ gibt die gleichmäßig konvergiert, lassen sich die **Fourier-Koeffizienten** a_n, b_n berechnen durch die **Fourier-Analyse**:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Frage: Lässt sich ein $f(x)$ durch geeignete Wahl von a_n, b_n darstellen als

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] ? \end{aligned}$$



Berechnungsformel: (Fourier Analyse)

Unter der Voraussetzung, dass es eine Darstellung $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ gibt die gleichmäßig konvergiert, lassen sich die **Fourier-Koeffizienten** a_n, b_n berechnen durch die **Fourier-Analyse**:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Jean Baptiste Joseph Fourier
*1768 Auxerre †1830 Paris



Erinnerung Taylorreihe

Definition (Taylorreihe)
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion f in der Funktion f (oder f Ableitung) in $a \in D$ sei $f^{(k)}$ die k -te Ableitung von f in a .

Formel (Taylorreihe)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Beispiel (Taylorreihe)
 Sei $f(x) = e^x$. Dann gilt $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
 Die Taylorreihe von e^x in $a=0$ ist
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Periodische Funktionen

Definition (Periodische Funktion)
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **periodisch** mit **Periode** $T > 0$, falls $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Definition (Fundamentale Periode)
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit Periode $T > 0$. T heißt **fundamentale Periode** von f , falls T die kleinste positive Periode von f ist.

Beispiel (Fundamentale Periode)
 Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ ist periodisch mit Periode 2π .
 Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ ist periodisch mit Periode 2π .

Konstruktion von Funktionenreihen

Konstruktion einer Potenzreihe
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die **Maclaurinreihe** von f ist die Taylorreihe von f in $a=0$.

Konstruktion einer Potenzreihe
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die **Taylorreihe** von f in a ist die Taylorreihe von f in a .

Konstruktion einer Potenzreihe
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die **Taylorreihe** von f in a ist die Taylorreihe von f in a .

Analysis II



Fourier Reihe

Frage: Lässt sich $f(x)$ durch geeignete Wahl von a_n, b_n darstellen als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Beispiel (Fourierreihe)
 Sei $f(x) = x$ für $x \in (-\pi, \pi)$. Dann gilt $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$.

Erinnerung Sinus/Cosinus

Definition (Sinus/Cosinus)
 Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **sinusförmig**, falls $f(x) = A \sin(\omega x + \phi) + B$ für gewisse $A, \omega, \phi, B \in \mathbb{R}$ gilt.

Definition (Sinus/Cosinus)
 Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **cosinusförmig**, falls $f(x) = A \cos(\omega x + \phi) + B$ für gewisse $A, \omega, \phi, B \in \mathbb{R}$ gilt.