Analysis II

Woche 8 / J. Behrens

① Berechnung von exp(x):

<u>Ziel</u>: Berechnung von exp(x) für gegebenes x
(mit Hilfe elementarer Operationen +, −, *, / Taschenrechner)
mit vorgegebener Genauigkeit.

- Satz von Taylor:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \quad \text{wobei } R_n(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \ \xi \in [0, x]$$

- Finde n: $|R_n(x)| \leq 10^{-8}$ (= Toleranz vorgewählt)

- Beispiel: $\exp(\sqrt{3})$, d.h. $x = \sqrt{3}$

- Wegen Monotonie gilt:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \left| \frac{\exp(2)}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$$

$$= \frac{e^2}{(n+1)!} \sqrt{3}^{\,n+1} < \frac{3^2}{(n+1)!} 2^{n+1}$$

- "Probieren" ergibt für $n = 17$:

$$(n+1)! = 18! = 6.402.373.705.728.000 > 6 \cdot 10^{15}$$

$$2^{n+1} = 2^{18} = 262144 < 3 \cdot 10^5$$

$$|R_n(x)| < \frac{3^2}{(n+1)!} 2^{n+1} < \frac{9}{6 \cdot 10^{15}} \cdot 3 \cdot 10^5 = 4.5 \cdot 10^{-10}$$

- $|R_{17}(\sqrt{3})| < 4.5 \cdot 10^{-10}$

$$\exp(\sqrt{3}) = \sum_{k=0}^{16} \frac{\sqrt{3}^k}{k!} \quad \text{mit Genauigkeit } 10^{-8}.$$

Bemerkungen zum Logarithmus:

$\log_a x$ ist Umkehrfunktion zu a^x

- Für $a = e$: $\log_e x = \ln x$ natürlicher Logarithmus
- Für $a = 10$: $\log_{10} x = \lg x$ dekadischer Logarithmus

② zur Eulerschen Formel:

- $$\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

- Für $z = ix$:

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots$$

$$= \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots}_{\cos x} + i\underbrace{\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots\right)}_{\sin x}$$

- Mit den Definitionen von $\cos x$ und $\sin x$ als Reihen gilt:

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x \qquad (*)$$

- Analog: $\exp(-ix) = \cos x - i \sin x$ (**)
- Aus der Kombination von (*) und (**) folgt:

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \Rightarrow \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

③ Nachweis von Nullstellen der cos-Fkt.:

<u>1. Schritt:</u> $\sin x > 0$ in $]0, 2[$

Sortiere die Reihe um (geht, da sin-Reihe absolut konvergent)

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^5}{120}\left(1 - \frac{x^2}{42}\right) + \dots + \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4m+2)(4m+3)}\right) + \dots$$

für $x \in]0,2[$ ist also $\sin x > 0$.

<u>2. Schritt:</u> $\cos(0) = 1$, Bestimme $\cos(2)$

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - + \dots$$

Es gilt $\frac{2^2}{2!} > \frac{2^4}{4!} > \frac{2^6}{6!} > \dots$

Dh. cos-Reihe ist alternierende Reihe mit monoton fallenden Gliedern

$$\Rightarrow \cos(2) < 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0$$

3. Schritt: Monotonie von cos:

Sei $0 < x_1 < x_2 < 2$

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \underbrace{\sin \frac{x_1 + x_2}{2}}_{\in]0,2[} \underbrace{\sin \frac{x_2 - x_1}{2}}_{\sin > 0 \text{ in }]0,2[} < 0$$

$\Rightarrow$ cos ist in $]0,2[$ streng monoton fallend

4. Schritt: Anwendung Mittelwertsatz

Da cos stetig (beständig konvergente Potenzreihe) und streng monoton fallend in $]0,2[$ mit $\cos(0) > 0$ und $\cos(2) < 0$

$\overset{\text{Mittelwertsatz}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \xi$ in $]0,2[$: $\cos(\xi) = 0$

Diese Stelle nennen wir $\frac{\pi}{2} = \xi$

d.h. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Nullstelle ist eindeutig wg. strenger Monotonie.

(4) Periodizität von sin:

- Wegen $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$ und Positivität von cos in $]0, \frac{\pi}{2}[$ und $\sin > 0$ in $]0, 2[$

$\Rightarrow$ $\sin x > 0$ für $0 < x < \pi$ und $\sin \pi = 0$

- Aus $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ folgt

$$\cos \pi = 2\cos^2 \frac{\pi}{2} - 1 = -1$$

- Aus Additionstheorem

$$\sin(x+\pi) = \sin x \cos\pi + \cos x \sin \pi = -\sin x$$

- Daher:

$$\begin{aligned} \sin(x+2\pi) &= \sin(x+\pi+\pi) \\ &= \sin(x+\pi)\cos\pi + \cos(x+\pi)\sin\pi \\ &= -\sin x\,(-1) = \sin(x) \end{aligned}$$

- Analog für $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ $\boxtimes$