ANALYSIS II

Woche 07 / J. Behrens

① Konvergenzradius:

- Wir beschränken uns auf $\frac{1}{\rho} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$
- Wir wenden das Quotientenkriterium für Reihen an
  - $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad : \quad a_k \neq 0$ für $k > k_0$
  - $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = d$

  $\Rightarrow$ absolute Konvergenz für $d < 1$

  Divergenz sonst.
- Also: für $k > k_0$ (punktweise für beliebiges x)

$$\left|\frac{a_{k+1}\,(x-x_0)^{k+1}}{a_k\,(x-x_0)^k}\right| = \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \cdot |x-x_0| \xrightarrow[k\to\infty]{} C\,|x-x_0|$$

- Nach dem Quotientenkriterium liegt Konvergenz vor, falls

$$C\,|x-x_0| < 1$$

$$\Rightarrow |x-x_0| < \frac{1}{C} = \rho \quad \text{bzw. } x \in \,]x_0-\rho, x_0+\rho[$$

- Nach Quotientenkriterium liegt Divergenz vor, falls

$$C\,|x-x_0| > 1$$

$\Rightarrow \rho$ ist Konvergenzradius

$\boxtimes$

② Potenzreihe "mit Lücken": $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1}$ $(x_0 = 0)$

- Problem: Berechnungsformel für Konvergenzradius nicht einfach anwendbar!
- Aber: $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k} = x \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} u^k} \text{ mit } u = x^2$$

- Berechne mit D ρ:

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{3^k}{k+1}}{\frac{3^{k+1}}{k+2}} = \lim_{k \to \infty} \frac{3^k}{3^{k+1}} \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{3}$$

- Also konvergiert die Reihe für $|u| < \frac{1}{3}$ $(u = x^2)$

$\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1}$ konvergiert für $x^2 < \frac{1}{3}$ oder $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

③ Additionstheorem:

- Potenzreihen konvergieren glm. absolut, daher kann man multiplizieren,
- Wende Cauchy Produkt an
- $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$

Cauchy-Produkt $= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{k-j}}{(k-j)!} \cdot \frac{y^j}{j!}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k!}{(k-j)! \cdot j!} x^{k-j} y^j$$

Binomische Formel

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x-y)^k = \exp(x+y) \quad \boxtimes$$