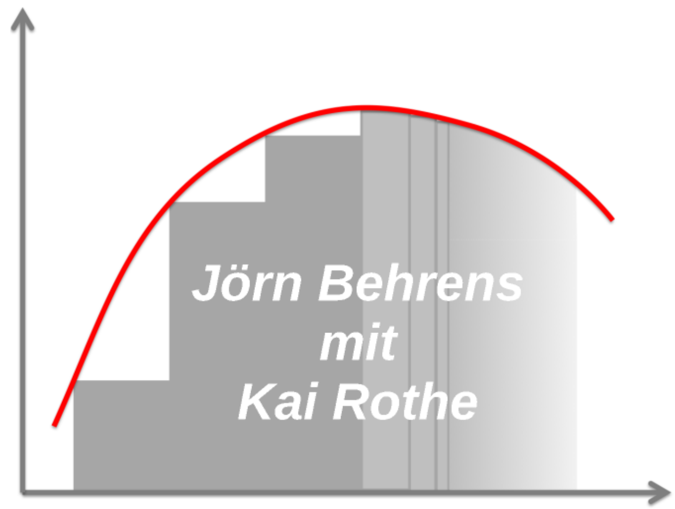
Analysis II



Funktionenfolgen und -reihen

Buch Kapitel 3.2 und 3.3

Funktionenfolge

Definition: (Funktionenfolge)
Die unendliche Folge

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$$

der Funktionen $f_k : D \to \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ heißt Funktionenfolge auf D.
Schreibe kurz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (f_n).

Definition: (punktweise Konvergenz)
Die Funktionenfolge (f_n) auf D heißt punktweise konvergent, wenn für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))$ konvergiert.

Wir sagen abkürzend einfach *konvergent*.

Die Grenzfunktion f ist für jedes $x \in D$ gegeben durch:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x).$$

Beispiel: Sei die Funktionenfolge (f_n) in $D =]-\infty, \infty[$ gegeben durch:

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dann strebt $f_n(x)$ punktweise gegen:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad |x| = 1, \\ 0 & \text{für} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Definition: (Funktionenfolge)
Die unendliche Folge

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$$

der Funktionen $f_k : D \to \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ heißt Funktionenfolge auf D.
Schreibe kurz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder (f_n).

Definitio
Die Funk
wenn für

Wir sage

Die Gren

Definition: (punktweise Konvergenz)
Die Funktionenfolge (f_n) auf D heißt punktweise konvergent, wenn für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))$ konvergiert.

Wir sagen abkürzend einfach *konvergent*.

olge auf D.

Die Grenzfunktion f ist für jedes $x \in D$ gegeben durch:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x).$$

Beispiel: Sei die Funktionenfolge (f_n) in $D =]-\infty, \infty[$ gegeben durch:

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dann strebt $f_n(x)$ punktweise gegen:

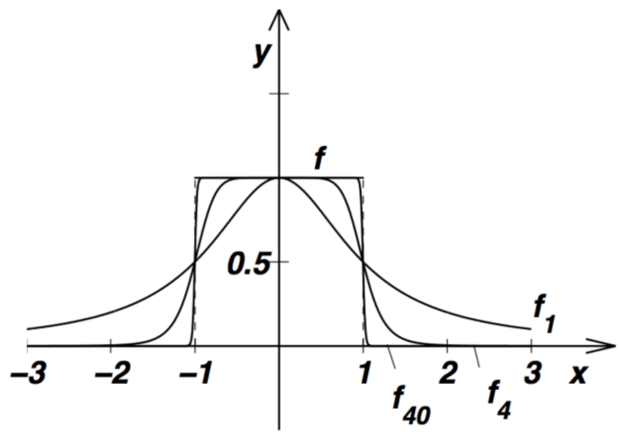
$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad |x| = 1, \\ 0 & \text{für} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Beispiel: Sei die Funktionenfolge (f_n) in $D =]-\infty, \infty[$ gegeben durch:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dann strebt $f_n(x)$ punktweise gegen:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad |x| = 1, \\ 0 & \text{für} \quad |x| > 1. \end{cases}$$



Abstand von Funktionen

Definition: (Abstand)
Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen, so heißt

$$\|f - g\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|$$

Abstand der Funktionen voneinander.

Definition: (Supremumsnorm)
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion, so ist

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

die Supremumsnorm der Funktion f.

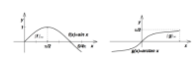
Bemerkungen:

- Die Supremumsnorm ist gerade der Abstand von f zur Funktion $g \equiv 0$.
- Sind f, g stetig und ist D kompakt, so gilt:

$$\|f - g\|_\infty = \max_{x \in D} |f(x) - g(x)| \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in D} |f(x)|.$$

- Dann existiert $x_0 \in D$ bzw. $x_1 \in D$ mit

$$\|f - g\|_\infty = |f(x_0) - g(x_0)| \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_\infty = |f(x_1)|.$$



$f : [0, \frac{5}{4}\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x.$ $\quad g : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, g(x) = \arctan x.$

Definition: (Abstand)
Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen, so heißt

$$\|f - g\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|$$

Abstand der Funktionen voneinander.

Definition: (Supremumsnorm)
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion, so ist

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

die Supremumsnorm der Funktion f.

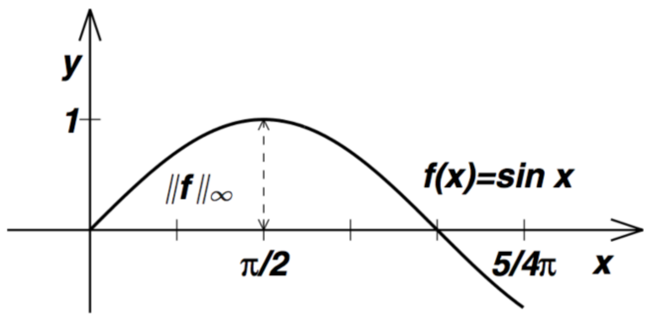
Bemerkungen:

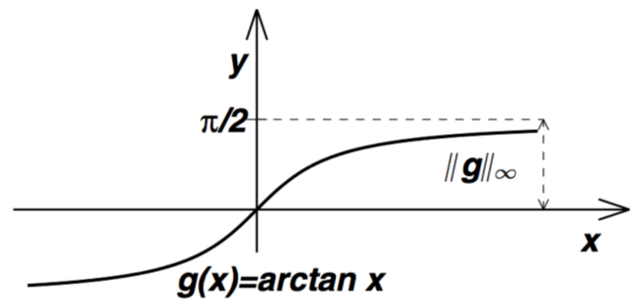
- Die Supremumsnorm ist gerade der Abstand von f zur Funktion $g \equiv 0$.
- Sind f, g stetig und ist D kompakt, so gilt:

$$\|f - g\|_\infty = \max_{x \in D} |f(x) - g(x)| \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_\infty = \max_{x \in D} |f(x)|.$$

- Dann existiert $x_0 \in D$ bzw. $x_1 \in D$ mit

$$\|f - g\|_\infty = |f(x_0) - g(x_0)| \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_\infty = |f(x_1)|.$$





$$f : [0, \frac{5}{4}\pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x. \quad g : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, g(x) = \arctan x.$$

onen

umsnorm]
änkte Funktion, so ist

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

der Funktion f.

Gleichmäßige Konvergenz

Definition: (Gleichmäßige Konvergenz)
Sei (f_n) mit $f_n : D \to \mathbb{R}$ Funktionenfolge, dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n - f$ auf D beschränkt sind und es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Schreibe auch:

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n \quad \text{oder} \quad f_n \to f \text{ für } n \to \infty.$$

1

Satz: (Cauchy-Kriterium f. gleichmäßige Konvergenz)
Sei (f_n) Funktionenfolge mit $f_n : D \to \mathbb{R}$ beschränkt. f_n konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es n_0, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon.$$

Definition: (Gleichmäßige Konvergenz)
Sei (f_n) mit $f_n : D \to \mathbb{R}$ Funktionenfolge, dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n - f$ auf D beschränkt sind und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Schreibe auch:

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \text{oder} \quad f_n \to f \text{ für } n \to \infty.$$

Satz: (Ca
Sei (f_n) F
gleichmäßi
Zu jedem

g gegen
nkt sind

1

Satz: (Cauchy-Kriterium f. gleichmäßige Konvergenz)
Sei (f_n) Funktionenfolge mit $f_n : D \to \mathbb{R}$ beschränkt. f_n konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es n_0, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon.$$

Stetige Grenzfunktion

Satz: (Stetige Grenzfunktion)
Jede auf D gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen (f_n) hat auf D eine stetige Grenzfunktion.

Satz: (Stetige Grenzfunktion)
Jede auf D gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen (f_n) hat auf D eine stetige Grenzfunktion.

Satz: (Stetige Grenzfunktion)
Jede auf D gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen (f_n) hat auf D eine stetige Grenzfunktion.

Bemerkung: Der Satz kann auch anders formuliert werden:
Sei $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k \in D$ und (f_n) gleichmäßig konvergent, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lim_{k\to\infty} x_k) = \lim_{k\to\infty} [\lim_{n\to\infty} f_n(x_k)] = \lim_{k\to\infty} [f(x_k)].$$

2

Gliedweise Integration und Differentiation

Satz: (Gliedweise Differentiation)
Die Folge (f_n) und ihre Ableitungen (f_n') seien auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent und es gelte $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.
Dann ist f auf $[a,b]$ differenzierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = f'.$$

Satz: (Gliedweise Integration)
Die Folge (f_n) sei auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent und die f_n seien integrierbar.
Dann ist die Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Bemerkungen:

- Im Satz über die gliedweise Differentiation muss vorausgesetzt werden, dass die Folge der Ableitungen (f_n') gleichmäßig konvergiert.
- Im Ergebnis der Differentiation der Folge (f_n) entsteht wieder eine Funktionenfolge (f_n').
- Im Ergebnis der Integration der Folge (f_n) entsteht eine Zahlenfolge $(\int_a^b f_n(x)\, dx)$.

Satz: (Gliedweise Differentiation)
Die Folge (f_n) und ihre Ableitungen (f_n') seien auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergent und es gelte $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.
Dann ist f auf $[a, b]$ differenzierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = f'.$$

Sat
Die
Da

Satz: (Gliedweise Differentiation)
Die Folge (f_n) und ihre Ableitungen (f_n') seien auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergent und es gelte $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.
Dann ist f auf $[a, b]$ differenzierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = f'.$$

Bemerkung: Es reicht sogar die Voraussetzung:
Sei (f_n) für ein $x \in [a, b]$ konvergent.

gent

Satz: (Gliedweise Integration)
Die Folge (f_n) sei auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergent und die f_n seien integrierbar. Dann ist die Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Bemerkungen:

- Im Satz über die gliedweise Differentiation muss vorausgesetzt werden, dass die Folge der Ableitungen (f_n') gleichmäßig konvergiert.
- Im Ergebnis der Differentiation der Folge (f_n) entsteht wieder eine Funktionenfolge (f_n').
- Im Ergebnis der Integration der Folge (f_n) entsteht eine Zahlenfolge $(\int_a^b f_n(x)\, dx)$.

integrierbar.

Funktionenreihe

Definition: (Funktionenreihe)
Sei (f_k) eine Funktionenfolge auf D. Definiere eine neue Funktionenfolge (s_n) durch:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(s_n) heißt unendliche Reihe oder Reihe der Funktionen (f_k).
f_k heißen Glieder der Reihe und s_n Teil- oder Partialsummen.

Schreibe kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

Definition: (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)
Die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ heißt punktweise bzw. gleichmäßig konvergent, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert.

Die Grenzfunktion $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ heißt Summe der Reihe (oder Summenfunktion).
Schreibe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ mit } x \in D.$$

Definition: (Gleichmäßig absolut konvergent)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von auf D beschränkten Funktionen heißt gleichmäßig absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ konvergiert.

Satz: (
Eine Re
genau d
Zu jede

Sa
Je
Fu
un

Definition: (Funktionenreihe)
Sei (f_k) eine Funktionenfolge auf D. Definiere eine neue Funktionenfolge (s_n) durch:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(s_n) heißt unendliche Reihe oder Reihe der Funktionen (f_k).
f_k heißen Glieder der Reihe und s_n Teil- oder Partialsummen.

Schreibe kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

Definition: (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)
Die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ heißt punktweise bzw. gleichmäßig konvergent, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen punktweise bzw. gleichmäßig konvergiert.

Die Grenzfunktion $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ heißt Summe der Reihe (oder Summenfunktion). Schreibe

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ mit } x \in D.$$

Definition: (Gleichmäßig absolut konvergent)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von auf D beschränkten Funktionen heißt gleichmäßig absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ konvergiert.

Definition: (Gleichmäßig absolut konvergent)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von auf D beschränkten Funktionen heißt gleichmäßig absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ konvergiert.

Bemerkung: Falls $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig absolut konvergent, so folgt auch die gleichmäßige Konvergenz, denn es gilt:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty,$$

wegen $\sup_{x \in D}(f+g) \leq \sup_{x \in D} f + \sup_{x \in D} g$.

t, wenn

nktion).

Konvergenz von Funktionenreihen

Satz: (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ mit auf D beschränkten Funktionen f_k konvergiert auf D genau dann gleichmäßig, wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > n \geq n_0$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k \right\|_{\infty} < \epsilon.$$

Satz: (Majoranten-Kriterium von Weierstraß)
Für die Glieder der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gelte für $k > k_0 \in \mathbb{N}$

$$\|f_k\|_{\infty} \leq \alpha_k,$$

wobei $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ eine konvergente Zahlenreihe ist.
Dann ist die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig absolut konvergent.

Die Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ heißt Majorante der Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

Satz: (Gliedweises Integrieren gleichmäßig konvergenter Reihen)
Jede gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von auf $[a, b]$ integrierbaren Funktionen besitzt auf $[a, b]$ eine integrierbare Summenfunktion $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ und es gilt:

$$\int_a^b s(x)\, dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

Satz: (Stetigkeit der Reihensumme)
Seien $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Glieder der gleichmäßig konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.
Dann ist die Summe $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ebenfalls stetig in $[a, b]$.

In den Randpunkten ist dabei einseitige Stetigkeit von f_k und s gemeint.

Satz: (Gliedweises Differenzieren gleichmäßig konvergenter Reihen)
Es gelte:

- Sei $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ eine Reihe auf $[a, b]$ differenzierbarer Funktionen.
- Es existiere die Grenzsumme $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für wenigstens ein $x \in [a, b]$
- Die Ableitungsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$ sei gleichmäßig konvergent in $[a, b]$.

Dann ist auch die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent in $[a, b]$.
Weiter ist die Summe $s(x)$ differenzierbar und $s'(x)$ kann durch gliedweises differenzieren berechnet werden:

$$s'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'.$$

Satz: (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ mit auf D beschränkten Funktionen f_k konvergiert auf D genau dann gleichmäßig, wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > n \geq n_0$

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k \right\|_\infty < \epsilon.$$

Satz: (Majoranten-Kriterium von Weierstraß)
Für die Glieder der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gelte für $k > k_0 \in \mathbb{N}$

$$\|f_k\|_\infty \leq \alpha_k,$$

wobei $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ eine konvergente Zahlenreihe ist.
Dann ist die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig absolut konvergent.

Die Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ heißt Majorante der Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

Satz: (Stetigkeit der Reihensumme)
Seien $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Glieder der gleichmäßig konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.
Dann ist die Summe $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ebenfalls stetig in $[a, b]$.

In den Randpunkten ist dabei einseitige Stetigkeit von f_k und s gemeint.

Satz: (Gliedweises Differenzieren gleichmäßig konvergenter Reihen)
Es gelte:

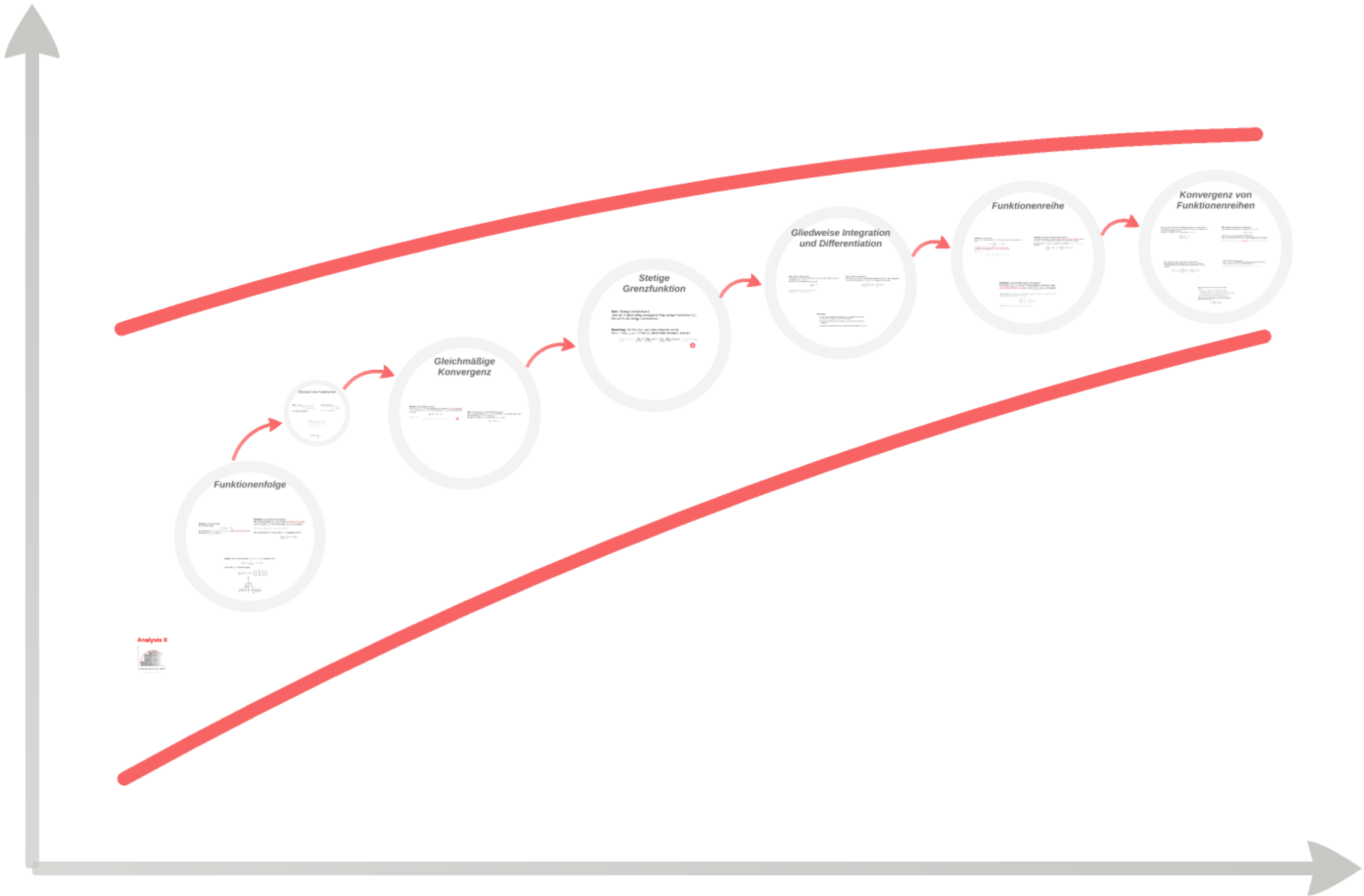
- Sei $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ eine Reihe auf $[a, b]$ differenzierbarer Funktionen.
- Es existiere die Grenzsumme $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ für wenigstens ein $x \in [a, b]$
- Die Ableitungsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$ sei gleichmäßig konvergent in $[a, b]$.

Dann ist auch die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent in $[a, b]$.
Weiter ist die Summe $s(x)$ differenzierbar und $s'(x)$ kann durch gliedweises differenzieren berechnet werden:

$$s'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'.$$

Satz: (Gliedweises Integrieren gleichmäßig konvergenter Reihen)
Jede gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von auf $[a, b]$ integrierbaren Funktionen besitzt auf $[a, b]$ eine integrierbare Summenfunktion $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ und es gilt:

$$\int_a^b s(x)\, dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx.$$


Funktionenfolge
Gleichmäßige Konvergenz
Stetige Grenzfunktion
Gliedweise Integration und Differentiation
Funktionenreihe
Konvergenz von Funktionenreihen
Analysis II