ANALYSIS II

① Beispiel:

- Betrachte $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$ $\qquad n = 0,1,2\ldots$
- Punktweise: $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 1/2 & |x|=1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

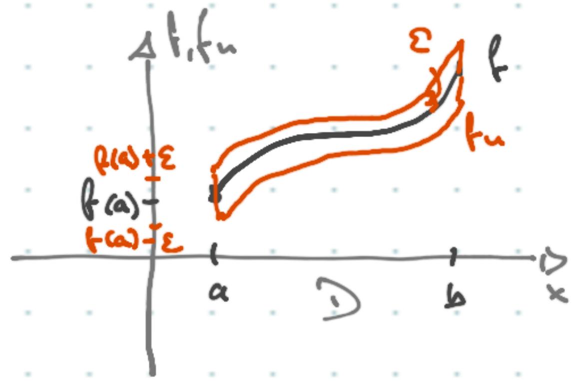
- Aber keine gleichmäßige Konvergenz, denn

  $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$ oder $\|f_n - f\|_\infty > \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$,

  denn $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{2}$

- graphische Intuition:

  Alle f_n $(n > n_0)$ liegen in einem "ε-Schlauch" um f



- gleichmäßige Konvergenz bezieht sich auf die Funktionen als Ganzes, d.h. $\forall x \in D$.

② stetige Grenzfunktionen:

- (f_n) konvergiere glm. gegen f auf D, f_n stetig,
  zeige also: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$
- Es gilt: $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$
  $x, x_0 \in D$
- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Ziel: jeder Summand $< \frac{\varepsilon}{3}$
  Da $f_n \to f$ glm. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: für $n \geq n_0$:
  $$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad |f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
  für $x, x_0 \in D$ beliebig.
- Betrachte also für $n > n_0$ $f_n : D \to \mathbb{R}$. Da f_n stetig nach Vor.:
  $\exists\, \delta > 0$: für $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$
  $$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
- $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$ ☒