# Analysis II

Woche 05 / J. Behrens

① <u>Beispiel</u>: geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

- Setze $q \neq 1$
- $s_n$ Partialsumme: $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

$$\Rightarrow \quad q \cdot s_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad s_n - q s_n = 1 - q^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad s_n = \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}$$

- Für <u>$|q| < 1$</u> ist $(s_n)$ <u>konvergent</u> (also auch $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1-q}$$

- Für <u>$|q| > 1$</u> wachsen $s_n$ mit $n \to \infty$ betragsmäßig über alle endlichen Grenzen

$$\Rightarrow (s_n) \text{ divergieren } \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k \ \underline{\text{divergiert}}$$

• Für $q = 1$: $\quad s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = n+1$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \infty$$

$$\Rightarrow (s_n) \text{ divergiert} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ divergiert}$$

• Für $q = -1$: $\quad s_n = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n\right]$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n\right] \text{ ex. nicht}$$

$$\Rightarrow (s_n) \text{ divergiert} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ divergiert.}$$

Insgesamt: $\displaystyle \sum_{k=0}^{\infty} q^k \begin{cases} \text{konvergiert für } |q|<1 \text{ mit Summe } \frac{1}{1-q} \\ \text{divergiert sonst } (|q| \geq 1). \end{cases}$

## ② Konvergenzkriterium f. Reihen:

- Die Teilsummenfolge $(s_n)$ einer konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ erfüllt das Cauchy-Kriterium.
- Also: zu jedem $\varepsilon > 0$ $\exists$ $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

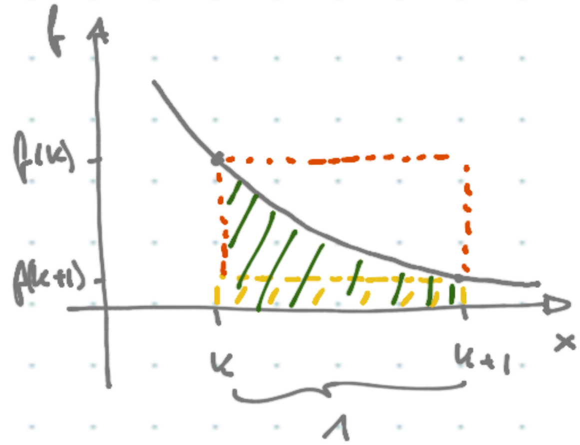
$$|s_{n+1} - s_n| < \varepsilon \qquad \text{für } n > n_0(\varepsilon)$$

- Nun ist $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$
- Daher gilt $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$ also Nullfolge ⊠

⚠ Bemerkung: Die Umkehrung gilt nicht.

## ③ Beweis Integralkriterium:

- Es gilt $\forall\, x \in [k, k+1]$, $k \geq m$, $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$, da $f$ monoton.




- Integration liefert:

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \geq f(k+1)$$

- Summation von $m$ bis $n$:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) \geq \int_m^{n+1} f(x)\, dx \geq \sum_{k=m+1}^{n+1} f(k)$$

- Wende Monotonie-Kriterium für Reihen an (beschränkte Partialsummen)

  Wende Monotonie-Bed. f. Integrale an (monotone Fkt.)

$\Longrightarrow$ Konvergenz $\boxtimes$