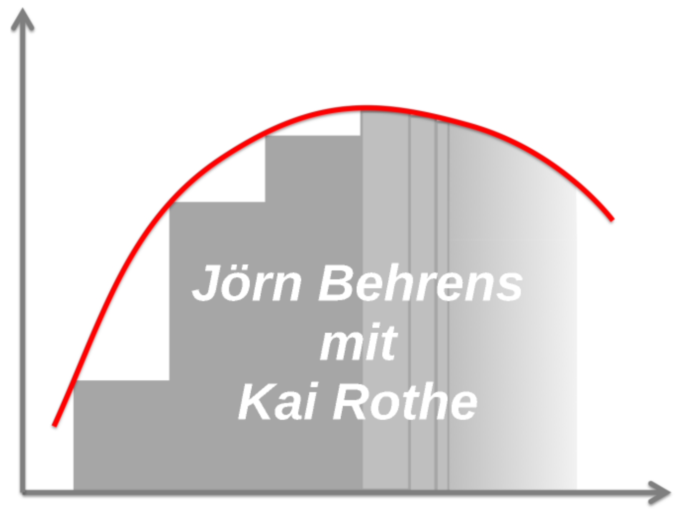
Analysis II



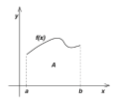
Bestimmtes Integral – Riemann Integral

Buch Kapitel 2.13

Motivation
Flächeninhalt

In 1. Vorlesung:

Exakte Berechnung von Flächen oder Bahnlängen



Fläche:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ eine auf $[a,b] \in \mathbb{R}$ positive, beschränkte Funktion.
Die Fläche von f auf $[a,b]$ besteht aus den Punkten

$$(x,y) : \quad a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x).$$

Ziel: Bestimme den Flächeninhalt!

Annahme: Flächeninhalt eines Rechtecks $R = L \cdot B$ (L Länge, B Breite).

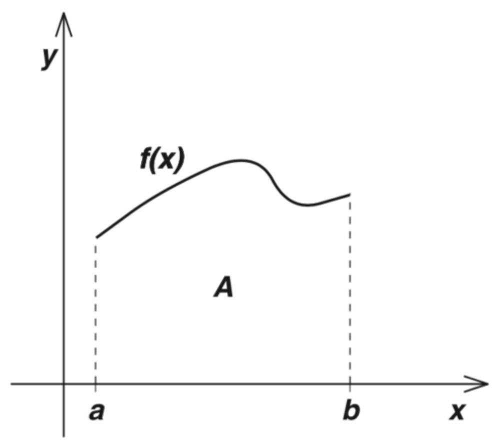
Flächeninhalt:
Idee:Unterteile die Fläche in Streifen

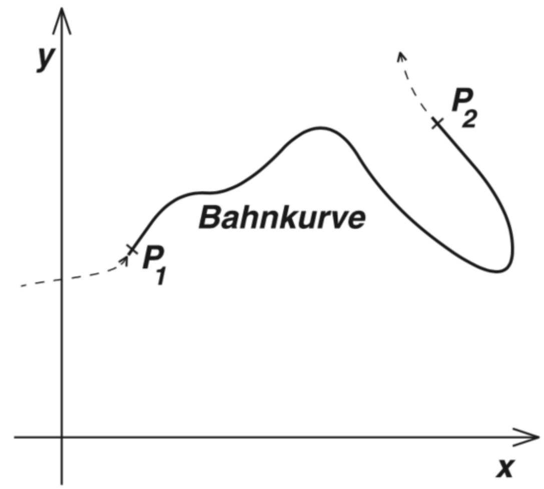
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

mit Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 : n$, der Breite Δx_i.
Die Menge der Intervalle heißt Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$.
Die größte Teilintervalllänge $|Z| = \max_{i=1:n} \Delta x_i$ heißt Feinheit von Z.

In 1. Vorlesung:

Exakte Berechnung von Flächen oder Bahnlängen





ːn

Fläche:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ eine auf $[a,b] \in \mathbb{R}$ positive, beschränkte Funktion.
Die Fläche von f auf $[a,b]$ besteht aus den Punkten

$$(x,y): \quad a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x).$$

Ziel: Bestimme den Flächeninhalt!

Annahme: Flächeninhalt eines Rechtecks $R = L \cdot B$ (L Länge, B Breite).

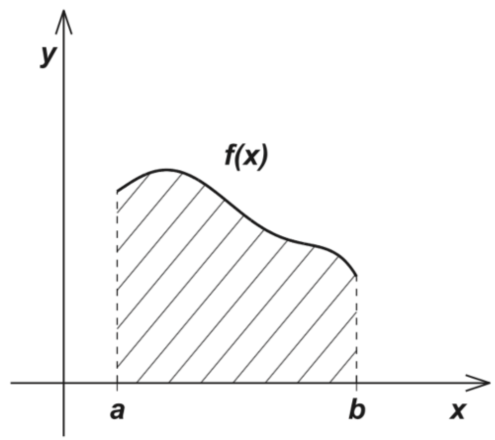
:n

Fläche:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ eine auf $[a,b] \in \mathbb{R}$ positive, beschränkte Funktion.
Die Fläche von f auf $[a,b]$ besteht aus den Punkten

$$(x,y) : \quad a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x).$$

Ziel: Bestimme den Flächeninhalt!

Annahme: Flächeninhalt eines Rechtecks $R = L \cdot B$ (L Länge, B Breite).



Flächeninhalt:
Idee:Unterteile die Fläche in Streifen

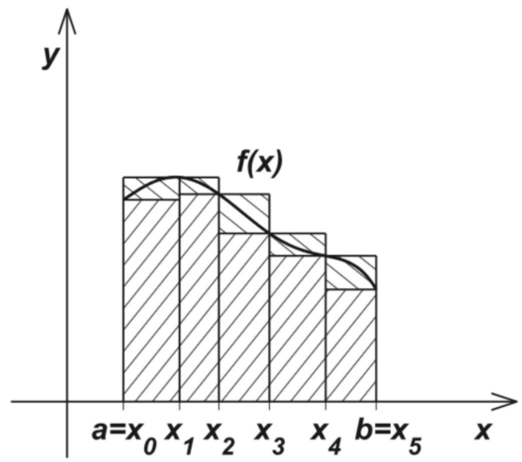
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

mit Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 : n$, der Breite Δx_i.
Die Menge der Intervalle heißt Zerlegung Z des Intervalls $[a, b]$.
Die größte Teilintervalllänge $|Z| = \max_{i=1:n} \Delta x_i$ heißt Feinheit von Z.

Flächeninhalt:
Idee:Unterteile die Fläche in Streifen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

mit Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 : n$, der Breite Δx_i.
Die Menge der Intervalle heißt Zerlegung Z des Intervalls $[a, b]$.
Die größte Teilintervalllänge $|Z| = \max_{i=1:n} \Delta x_i$ heißt Feinheit von Z.



Riemann Summe

Obersumme/Untersumme:
Sei $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ und $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$.
Dann bildet man über $[x_{i-1}, x_i]$ oberes bzw. unteres Rechteck mit Flächeninhalten $\Delta x_i \cdot M_i$ bzw. $\Delta x_i \cdot m_i$.
Damit erhält man

$$S_f(Z) = \sum_{i=1:n} M_i \Delta x_i \quad \text{Obersumme},$$
$$s_f(Z) = \sum_{i=1:n} m_i \Delta x_i \quad \text{Untersumme}$$

von f bezüglich Z.

Riemannsche Summe:
Sei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig im Intervall, $i = 1:n$, so gilt $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$.

$$R(Z) = \sum_{i=1:n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

heißt Riemannsche Summe bezüglich der Zerlegung Z.

Bemerkung:
Die Menge der Obersummen ist nach unten,
die Menge der Untersummen nach oben beschränkt.

Denn: Sind Z_1 und Z_2 beliebige unterschiedliche Zerlegungen, dann ist Z die Menge aller Durchschnitte der Teilintervalle eine verfeinerte Zerlegung.

Es gilt offensichtlich:

$$s_f(Z_1) \le s_f(Z) \le R(Z) \le S_f(Z) \le S_f(Z_2),$$
$$s_f(Z_2) \le s_f(Z) \le R(Z) \le S_f(Z) \le S_f(Z_1).$$

Insbesondere ist für beliebige Z_1, Z_2

$$s_f(Z1) \le S_f(Z_2) \quad \text{und} \quad s_f(Z_2) \le S_f(Z_1).$$

Oberintegral/Oberintegral:
Für feiner werdende Zerlegungen Z ist klar, dass die Obersumme kleiner und die Untersumme größer wird.
Daher

$$\bar{I}_f = \inf_Z S_f(Z), \quad \text{Oberintegral}$$
$$\underline{I}_f = \sup_Z s_f(Z), \quad \text{Unterintegral}$$

von f bezüglich Z.

Obersumme/Untersumme:
Sei $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ und $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$.
Dann bildet man über $[x_{i-1}, x_i]$ oberes bzw. unteres Rechteck mit Flächeninhalten $\Delta x_i \cdot M_i$ bzw. $\Delta x_i \cdot m_i$.
Damit erhält man

$$S_f(Z) = \sum_{i=1:n} M_i \Delta x_i \quad \text{Obersumme},$$
$$s_f(Z) = \sum_{i=1:n} m_i \Delta x_i \quad \text{Untersumme}$$

von f bezüglich Z.

Rie
Sei

hei

.
nteck

e,

ne

Riemannsche Summe:
Sei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig im Intervall, $i = 1 : n$, so gilt $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$.

$$R(Z) = \sum_{i=1:n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

heißt Riemannsche Summe bezüglich der Zerlegung Z.

.
nteck

e,

ne

Riemannsche Summe:
Sei $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig im Intervall, $i = 1 : n$, so gilt $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$.

$$R(Z) = \sum_{i=1:n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

heißt Riemannsche Summe bezüglich der Zerlegung Z.

Es gilt: $s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z)$.

ı ist
erlegung.

Oberintegral/Oberintegral:
Für feiner werdende Zerlegungen Z ist klar, dass die Obersumme kleiner und die Untersumme größer wird.
Daher

$$\bar{I}_f = \inf_Z S_f(Z), \quad \text{Oberintegral}$$
$$\underline{I}_f = \sup_Z s_f(Z), \quad \text{Unterintegral}$$

von f bezüglich Z.

Bemerkung:
Die Menge der Obersummen ist nach unten,
die Menge der Untersummen nach oben beschränkt.

Denn: Sind Z_1 und Z_2 beliebige unterschiedliche Zerlegungen, dann ist Z die Menge aller Durchschnitte der Teilintervalle eine verfeinerte Zerlegung.

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} s_f(Z_1) \le s_f(Z) \le R(Z) \le S_f(Z) \le S_f(Z_2), \\ s_f(Z_2) \le s_f(Z) \le R(Z) \le S_f(Z) \le S_f(Z_1). \end{aligned}$$

Insbesondere ist für beliebige Z_1, Z_2

$$s_f(Z1) \le S_f(Z_2) \quad \text{und} \quad s_f(Z_2) \le S_f(Z_1).$$

Oberint
Für fein
Untersu
Daher

von f b

Bemerkung:
Die Menge der Obersummen ist nach unten,
die Menge der Untersummen nach oben beschränkt.

Denn: Sind Z_1 und Z_2 beliebige unterschiedliche Zerlegungen, dann ist
Z die Menge aller Durchschnitte der Teilintervalle eine verfeinerte Zerlegung.

Es gilt offensichtlich:

$$s_f(Z_1) \leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_2),$$
$$s_f(Z_2) \leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_1).$$

Insbesondere ist für beliebige Z_1, Z_2

$$s_f(Z1) \leq S_f(Z_2) \quad \text{und} \quad s_f(Z_2) \leq S_f(Z_1).$$

Es folgt: $\bar{I}_f$ und $\underline{I}_f$ existieren mit

$$\underline{I}_f \leq \bar{I}_f.$$

Oberint
Für fein
Untersu
Daher

von f b

lle $x \in]a, b[$.

Riemann Integral

Bemerkung: Für f stetig (und viele andere übliche Funktionen) gilt

$$\underline{I}_f = \bar{I}_f$$

Definition: (Riemannsches Integral)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Dann heißt f Riemann-integrierbar, falls $\underline{I}_f = \bar{I}_f$.

Der gemeinsame Grenzwert wird bestimmtes Riemannsches Integral von f über $[a, b]$ genannt:

$$I = \int_a^b f(x)\ dx.$$

- a heißt untere, b obere Integrationsgrenze,
- $[a, b]$ heißt Integrationsintervall,
- x heißt Integrationsvariable,
- $f(x)$ heißt Integrand.

Satz: (Kriterium für Riemann Integrierbarkeit)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion.
Dann ist f genau dann integrierbar, wenn jede Folge Riemannscher Summen $R(Z_k)$ von f gegen denselben Grenzwert konvergiert:

$$\lim_{k\to\infty} R(Z_k) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Dabei gelte für die zugehörigen Zerlegungen Z_k: $|Z_k| \to 0$, und $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig.

1

Bemerkung:
Es ist nicht notwendig $f(x) > 0$, denn es sollen nicht nur Flächen berechnet werden.
Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\ dx$ ist die Fläche zwischen f und der x-Achse.

Bemerkung: Für f stetig (und viele andere übliche Funktionen) gilt

$$\underline{I}_f = \bar{I}_f$$

Defi
Sei f
$\underline{I}_f =$

Der g
gena

-
-
-
-

Bemerkung: Für f stetig (und viele andere übliche Funktionen) gilt

$$\underline{I}_f = \bar{I}_f$$

Ausgezeichnete/zulässige Zerlegungsfolge:
Ist (Z_k) eine Zerlegungsfolge für die gilt:

$$\lim_{k\to\infty} |Z_k| = 0$$

d.h. $\max_i \Delta x_i \to 0$ heißt ausgezeichnete oder zulässige Zerlegungsfolge.

Falls $\underline{I}_f = \bar{I}_f$ so folgt:

$$\lim_{k\to\infty} s_f(Z_k) = \underline{I}_f = \lim_{k\to\infty} R(Z_k) = \bar{I}_f = \lim_{k\to\infty} S_f(Z_k).$$

Defi
Sei f
$\underline{I}_f =$
Der g
gena

Definition: (Riemannsches Integral)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion. Dann heißt f Riemann-integrierbar, falls $\underline{I}_f = \bar{I}_f$.

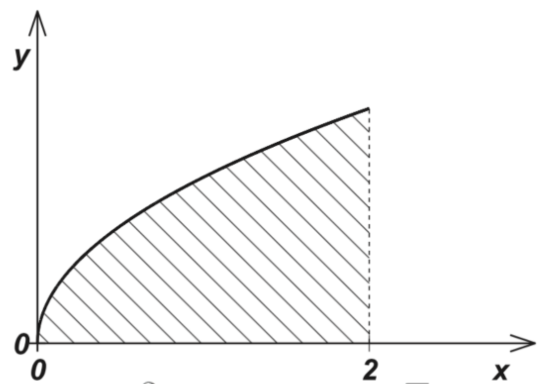
Der gemeinsame Grenzwert wird bestimmtes Riemannsches Integral von f über $[a, b]$ genannt:

$$I = \int_a^b f(x)\; dx.$$

- a heißt untere, b obere Integrationsgrenze,
- $[a, b]$ heißt Integrationsintervall,
- x heißt Integrationsvariable,
- $f(x)$ heißt Integrand.

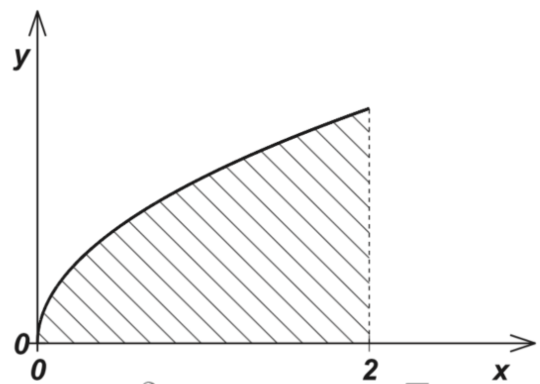
Bemerkung:
Es ist nicht notwendig $f(x) > 0$, denn es sollen nicht nur Flächen berechnet werden.
Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ ist die Fläche zwischen f und der x-Achse.

Bemerkung:
Es ist nicht notwendig $f(x) > 0$, denn es sollen nicht nur Flächen berechnet werden.
Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ ist die Fläche zwischen f und der x-Achse.

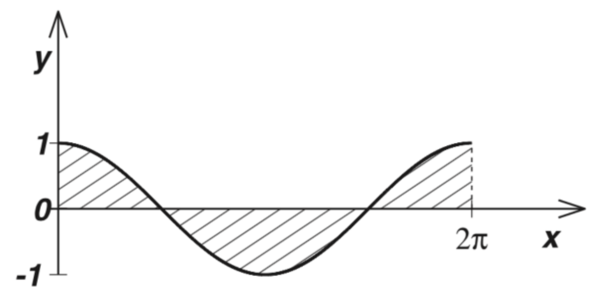


$$\int_0^2 \sqrt{x}\, dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Bemerkung:
Es ist nicht notwendig $f(x) > 0$, denn es sollen nicht nur Flächen berechnet werden. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Fläche zwischen f und der x-Achse.



$$\int_0^2 \sqrt{x}\ dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$



$$\int_0^{2\pi} \cos x\ dx = 0$$

Satz: (Kriterium für Riemann Integrierbarkeit)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion.
Dann ist f genau dann integrierbar, wenn jede Folge Riemannscher Summen $R(Z_k)$ von f gegen denselben Grenzwert konvergiert:

$$\lim_{k\to\infty} R(Z_k) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dabei gelte für die zugehörigen Zerlegungen Z_k: $|Z_k| \to 0$, und $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig.

1

Satz: (Kriterium für Riemann Integrierbarkeit)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion.
Dann ist f genau dann integrierbar, wenn jede Folge Riemannscher Summen $R(Z_k)$ von f gegen denselben Grenzwert konvergiert:

$$\lim_{k \to \infty} R(Z_k) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dabei gelte für die zugehörigen Zerlegungen Z_k: $|Z_k| \to 0$, und $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig.

1

Bemerkung: Für stetige Funktionen zeigt man:
Jede Folge Riemannscher Summen konvergiert gegen denselben Grenzwert.

Daher gilt **Satz**: (Stetigkeit $\Rightarrow$ Integrierbarkeit)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.

Das gilt auch für stückweise stetige Funktionen, die auf $[a, b]$ stetig sind mit Ausnahme endlich vieler

- hebbarer Unstetigkeitsstellen, oder
- Unstetigkeitsstellen 1. Art (Sprungstellen).

Mittelwertsätze und Rechenregeln

Satz: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in]a,b[$ mit

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b-a).$$

Korollar: (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g(x) > 0$ für alle $x \in]a,b[$.
Dann existiert $\xi \in]a,b[$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\ dx.$$

Satz: (Rechenregeln für bestimmte Integrale)
Seien f und g integrierbare Funktionen auf $[a,b]$, $a < c < b$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

- Linearität:
$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\ dx = c_1 \int_a^b f\ dx + c_2 \int_a^b g\ dx.$$
- Betrag:
$$\left| \int_a^b f\ dx \right| \leq \int_a^b |f|\ dx.$$
- Teilintervalle:
$$\int_a^b f\ dx = \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx.$$
- Positivität:
$$f \geq 0 \text{ auf } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f\ dx \geq 0.$$
- Null: ist f auf $[a,b]$ stetig und nichtnegativ, sowie
$$\int_a^b f\ dx = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Bemer

Ausgez
Ist (Z_k)

d.h. ma
Falls I_f

Satz:
Sei f :
Dann i
von f

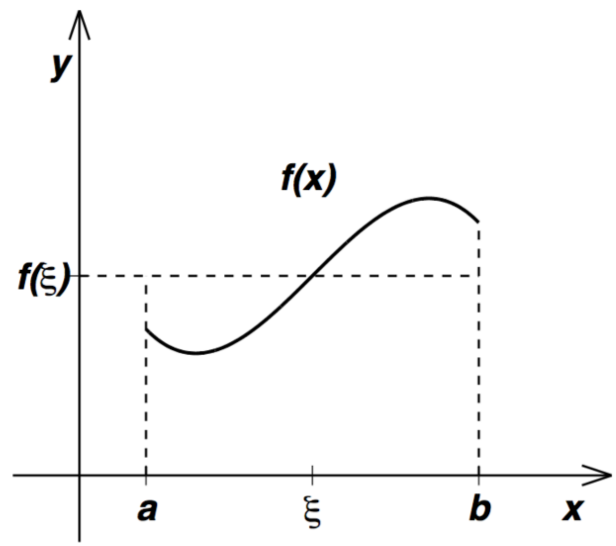
Dabei
beliebi

Satz: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in]a, b[$ mit

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(\xi)(b - a).$$

Satz: (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in]a, b[$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$



Korollar: (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$.
Dann existiert $\xi \in]a, b[$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\ dx.$$

Satz: (Rechenregeln für bestimmte Integrale)
Seien f und g integrierbare Funktionen auf $[a, b]$, $a < c < b$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

- Linearität:
$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\ dx = c_1 \int_a^b f\ dx + c_2 \int_a^b g\ dx.$$
- Betrag:
$$\left| \int_a^b f\ dx \right| \leq \int_a^b |f|\ dx.$$
- Teilintervalle:
$$\int_a^b f\ dx = \int_a^c f\ dx + \int_c^b f\ dx.$$
- Positivität:
$$f \geq 0 \text{ auf } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f\ dx \geq 0.$$
- Null: ist f auf $[a, b]$ stetig und nichtnegativ, sowie
$$\int_a^b f\ dx = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

Satz: (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I stetig, dann ist die Funktion F, gegeben durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

mit $x, a \in I$ eine Stammfunktion von f.

3

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I.
Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

und Integralrechnung

Satz: (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I stetig, dann ist die Funktion F, gegeben durch

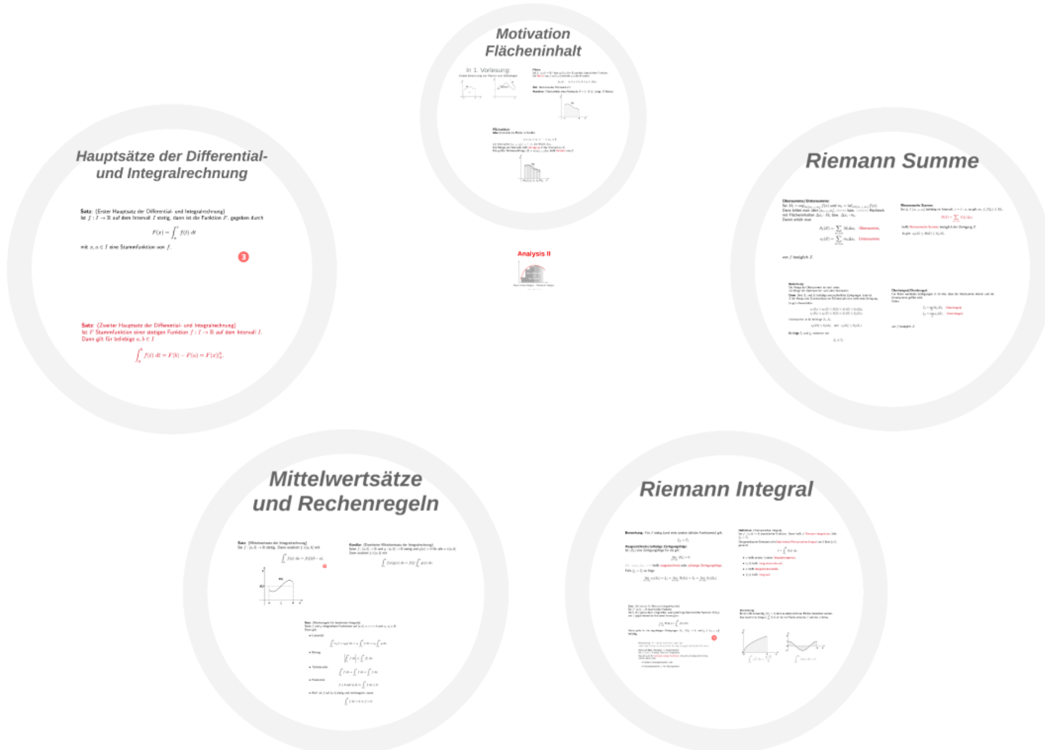
$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

mit $x, a \in I$ eine Stammfunktion von f.

3

Satz: (Zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist F Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall I.
Dann gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(t)\; dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$


Motivation Flächeninhalt
Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung
Riemann Summe
Analysis II
Mittelwertsätze und Rechenregeln
Riemann Integral