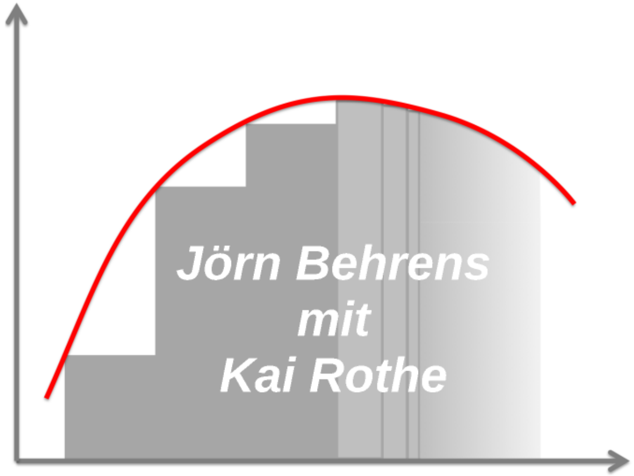
Analysis II



Integration

Buch Kapitel 2.13

und

/a2/17/lm.html

ten!

Ihr Professor

Koordinaten:

Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CEN
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

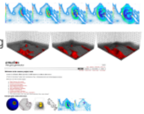
Hintergrund

Kurz-CV

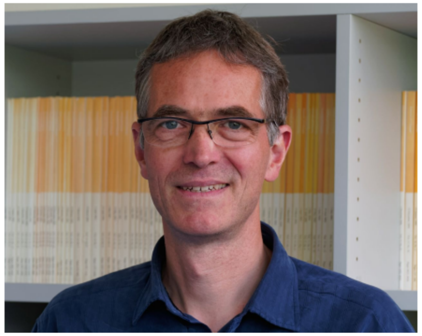
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung
Adaptive Atmosphären Modellierung
Gitter Erzeugung
Multi-Skalen Simulationen

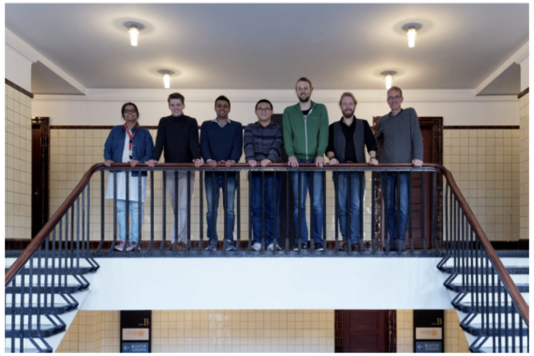


Koordinaten:



Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CEN
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Hintergrund

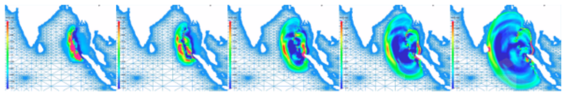


Kurz-CV

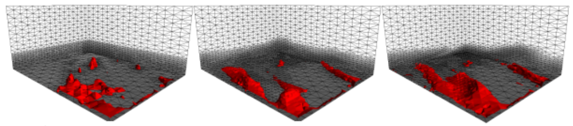
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung

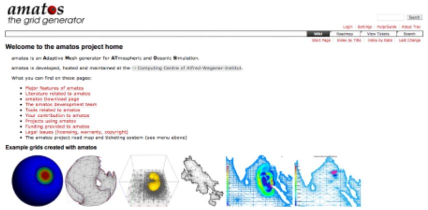


Adaptive Atmosphären Modellierung



Gitter Erzeugung

Multi-Skalen Simulationen



Infos zum Kurs

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.
R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.

Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/17/lm.html

Bitte gründlich vorbereiten!

Informationen Online

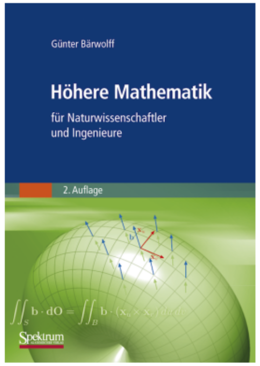
Stud.IP:

Analysis II: https://t1p.de/s0lm

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.



R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.

Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/

Materialien:

http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/17/lm.html

Bitte gründlich vorbereiten!

Informationen Online

Stud.IP:

Analysis II: https://t1p.de/s0lm

Erinnerung: Kurven

Definition

Definition: (Kurve im $\mathbb{R}^2$)
Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a,b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Kurvenstück in G mit

- Anfangspunkt $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^\top$,
- Endpunkt $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^\top$,
- Spur $\{\mathbf{x}(t) | a \le t \le b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem $\mathbb{R}^2$ werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^\top.$$

Ein Kurvenstück heißt regulär, wenn für alle $t \in [a,b]$ gilt:

$$(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 > 0.$$

Eine Parameterdarstellung des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine Orientierung gegeben.
Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i $(i = 1 : r)$, wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} $(i = 2 : r)$ entspricht, heißt Kurve.
Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

Tangente, Normale, Bogendifferential

Definition:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^\top$ heißt Tangentenvektor,
- $\mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^\top$ heißt Normalenvektor,

der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^\top$.

Bogenlänge: (Bogendifferential)

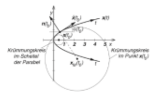
$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,dt.$$

heißt Differential der Bogenlänge (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Krümmungskreis

Bemerkung (Krümmungskreis):
Der Krümmungskreis einer Kurve im Punkt P_0 ist der Kreis,

- der durch P_0 geht,
- dessen Radius gleich dem Krümmungsradius ist: $R(t_0) = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, und
- dessen Mittelpunkt M_0 auf der durch P_0 gehenden Normalen N_0 liegt.



Krümmung, Krümmungsradius

Definition:
Die Krümmung einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^\top$, $t \in [a,b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^\top$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}.$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^\top$ gegeben ist, ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}.$$

$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt Krümmungsradius.

Definition

Definition: (Kurve im $\mathbb{R}^2$)
Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a,b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Kurvenstück in G mit

- Anfangspunkt $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a))^\top$,
- Endpunkt $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b))^\top$,
- Spur $\{\mathbf{x}(t) | a \leq t \leq b\}$.

Zur Darstellung der Kurvenpunkte aus dem $\mathbb{R}^2$ werden Spaltenvektoren verwendet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^\top.$$

Ein Kurvenstück heißt regulär, wenn für alle $t \in [a,b]$ gilt:

$$\left(x_1'(t)\right)^2 + \left(x_2'(t)\right)^2 > 0.$$

Eine Parameterdarstellung des Kurvenstücks mit dem Parameter t ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Durch wachsende Werte des Parameters t ist für das Kurvenstück eine Orientierung gegeben.
Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i $(i = 1 : r)$, wobei der Anfangspunkt von K_i dem Endpunkt von K_{i-1} $(i = 2 : r)$ entspricht, heißt Kurve.
Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es oft auch als Kurve bezeichnet.

Tangente, Normale, Bogendifferential

Definition:

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))^\top$ heißt Tangentenvektor,
- $\mathbf{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))^\top$ heißt Normalenvektor,

der Kurve $\mathbf{x}(t)$ im Punkt $(x(t), y(t))^\top$.

Bogenlänge: (Bogendifferential)

$$ds := \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$

heißt Differential der Bogenlänge (oder Bogenelement), wobei dt das Differential der unabhängigen Variablen t ist.

Krümmung, Krümmungsradius

Definition:
Die Krümmung einer regulären Kurve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^\top$, $t \in [a, b]$ mit zweimal stetig diff'baren Funktionen $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ beträgt im Punkt $P(t) = (x(t), y(t))^\top$

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^3}}.$$

Falls die Kurve als Graph der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x}(t) = (t, f(t))^\top$ gegeben ist, ergibt sich

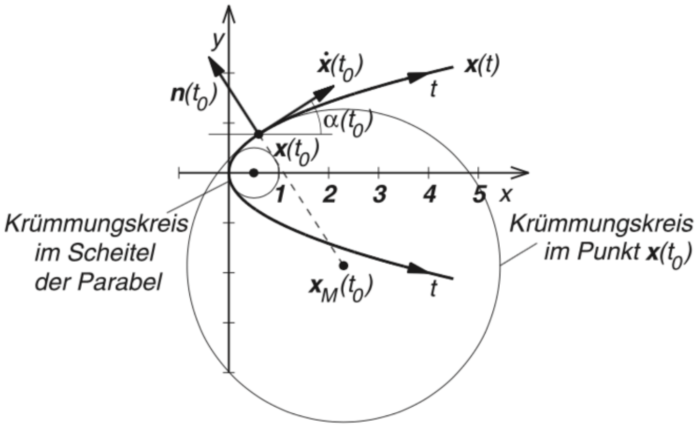
$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{(1 + (f'(t))^2)^3}}.$$

$R = \frac{1}{|\kappa|}$ heißt Krümmungsradius.

Krümmungskreis

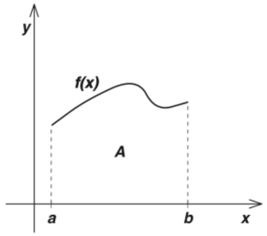
Bemerkung (Krümmungskreis):
Der Krümmungskreis einer Kurve im Punkt P_0 ist der Kreis,

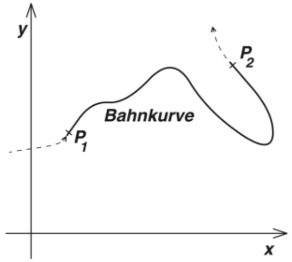
- der durch P_0 geht,
- dessen Radius gleich dem Krümmungsradius ist: $R(t_0) = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$, und
- dessen Mittelpunkt M_0 auf der durch P_0 gehenden Normalen N_0 liegt.



Integrale
Motivation

Exakte Berechnung von Flächen oder Bahnlängen





n

er Bahnlängen

Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Definition:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von f. Ist F Stammfunktion von f, so heißt der Ausdruck

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, unbestimmtes Integral der Funktion f.

- Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f.
- Die Funktion f heißt Integrand.

Integrationsre

Definition:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

Stammfunktion von f. Ist F Stammfunktion von f, so heißt der Ausdruck

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, unbestimmtes Integral der Funktion f.

- Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
- Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f.
- Die Funktion f heißt Integrand.

1

Integrationsregeln

Satz (Linearität des unbestimmten Integrals):
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int f(x)\, dx + c_2 \int g(x)\, dx.$$

Beweis:
Folgt unmittelbar aus der Definition. □

Satz (Substitutionsregel):
Sei f stetige Funktion auf dem Intervall J und ϕ stetig differenzierbar auf dem Intervall I. Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt, \quad$ mit $t = \phi(x)$,
2. $\int f(x)\, dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\, dt, \quad$ mit $x = \phi(t)$.

Beweis:
Folgt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x)$$

mit $F'(x) = f(x)$. □

Bemerkung (Partielle Integration):
Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen f und g ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\, dx, \text{ bzw.}$$

$$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx.$$

3

fessor

Satz (Linearität des unbestimmten Integrals):
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen mit Stammfunktionen und seien $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstante. Dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\ dx = c_1 \int f(x)\ dx + c_2 \int g(x)\ dx.$$

Beweis:
Folgt unmittelbar aus der Definition. □

Satz (Sul
Sei f ste
Intervall I

1. $\int f$
2. $\int f$

Beweis:
Folgt aus

mit $F'(x)$

$\in \mathbb{R}$ Kon-

Satz (Substitutionsregel):
Sei f stetige Funktion auf dem Intervall J und ϕ stetig differenzierbar auf dem Intervall I. Es gelte $\phi(I) \subset J$ und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} existiere. Dann gilt:

1. $\int f(\phi(x))\phi'(x)\ dx = \int f(t)\ dt,$ mit $t = \phi(x)$,
2. $\int f(x)\ dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\ dt,$ mit $x = \phi(t)$.

Beweis:
Folgt aus der Kettenregel der Differentiation:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x)$$

mit $F'(x) = f(x)$. $\square$

Algorithmus (Substitutionsregel):
Der Satz lässt sich anwenden:

1. Ersetze $\phi(x)$ durch t (Substitution).
2. Wegen $\frac{dt}{dx} = \phi(x)$ ersetze $\phi'(x)\,dx$ durch dt.
3. Berechne $\int f(t)\,dt$ (statt $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$).
4. Ersetze t durch $\phi(x)$ (Rücksubstitution).

2

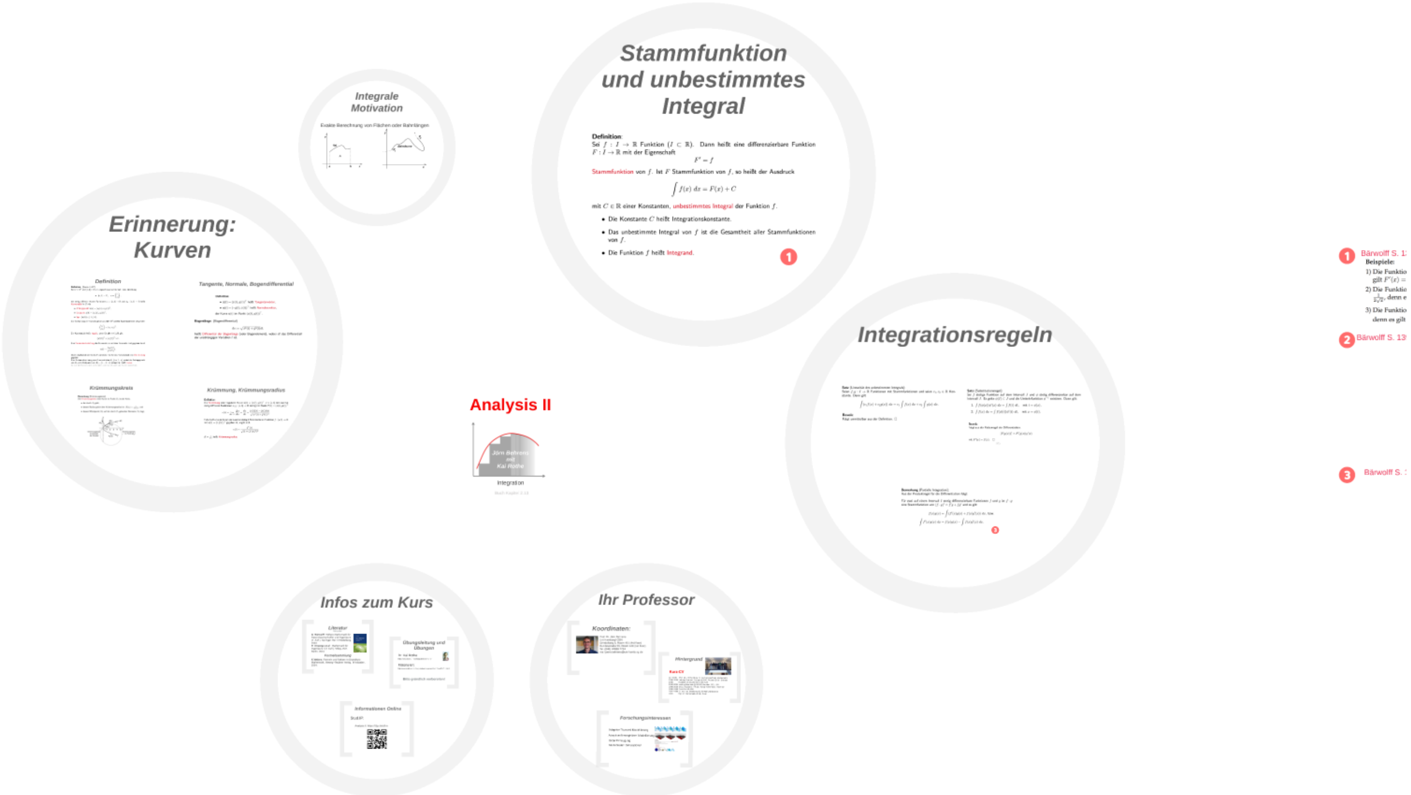
Bemerkung (Partielle Integration):
Aus der Produktregel für die Differentiation folgt:

Für zwei auf einem Intervall I stetig differenzierbare Funktionen f und g ist $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und es gilt:

$$f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\ dx, \text{ bzw.}$$

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx.$$

3


Integrale Motivation
Erinnerung: Kurven
Stammfunktion und unbestimmtes Integral
Definition:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion ($I \subset \mathbb{R}$). Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft
$F' = f$
Stammfunktion von f. Ist F Stammfunktion von f, so heißt der Ausdruck
$\int f(x)\, dx = F(x) + C$
mit $C \in \mathbb{R}$ einer Konstanten, unbestimmtes Integral der Funktion f.
• Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
• Das unbestimmte Integral von f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f.
• Die Funktion f heißt Integrand.
1
Analysis II
Integration
Integrationsregeln
Infos zum Kurs
Ihr Professor
1 Bärwolff S. 1
2 Bärwolff S. 13
3 Bärwolff S.