ANALYSIS II

Woche 01 / J. Behrens

① Beispiel:

a) Die Funktion $F(x) = x^3$ ist Stammfkt. von $f(x) = 3x^2$, denn es gilt

$$F'(x) = f(x).$$

b) Die Funktion $F(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$ ist Stammfkt von $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, denn es gilt

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

c) Die Funktion $F(x) = \frac{\sin^2 x}{2}$ ist Stammfkt von $f(x) = \sin x \cos x$, denn es gilt

$$\left(\frac{\sin^2 x}{2}\right)' = \frac{2}{2} \sin x \cdot \cos x = \sin x \cos x.$$

(2) Beispiele für Substitution:

a) Sei g stetig differenzierbar ohne Nullstellen. Dann ergibt sich über die Substitution $t = g(x)$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C = \ln|g(x)| + C.$$

Wenn z.B. das Integral $\int \frac{6x^2}{x^3+5}$ gesucht ist, dann erhält man mit der Substitution $t = \phi(x) = x^3+5$

$$\int \frac{6x^2}{x^3+5}\, dx = 2\int \frac{1}{t}\, dt = 2\ln|t| + C = 2\ln|x^3+5| + C.$$

b) Das Integral $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$ ist gesucht. Mit der Substitution $t = \sin x$ erhalte ich

$$\int e^{\sin x} \cos x\, dx = \int e^t\, dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$$

③ Beispiel partielle Integration:

Mit $u' = \sin x$ und $v = \sin x$ erhält man

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \, dx &= -\cos x \sin x - \int (-\cos x) \cos x \, dx \\
&= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x \, dx \\
&= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx \\
&= -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx
\end{aligned}$$

Damit ist $\int \sin^2 x = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + C.$